大　　学

数学系

自学丛书

实变函数论



SHIBIAN HANSHU

大学数学自学丛书

空间解析几何　高等几何
高等代数　计算方法
数学分析　概率论与数理统计
常微分方程　近世代数
复变函数论　微分几何
实变函数论　电子计算机与算法语言BASIC

统一书号：7090 261
定　价：1.95 元

大学数学系自学丛书

实 变 函 数 论

Shibian Hanshu Lun

徐荣权
金长泽 主编

辽宁人民出版社出版 辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号） 沈阳新华印刷厂印刷

字数：370,000 开本：850×1168 1/32 印张：15 3/8
印数：1—18,500
1984年10月第1版 1984年10月第1次印刷

责任编辑：俞晓群 封面设计：安今生

统一书号：7090·261 定价：1.95元

出 版 说 明

为了适应广大在职人员和社会青年自学成才的需要，根据国家建立高等教育自学考试制度的精神，以满足学员自学教材的要求，由辽宁人民出版社出版一套大学数学系自学丛书。

本丛书是由东北师范大学数学系，根据教育部规定的普通高等院校本科必修课现行教学计划和教学大纲编写的。教材内容系统，数据充实，条理清晰，深入浅出；每章均有学习指导和习题解答，便于自学。经过刻苦自学，即可无师自通，达到本科毕业水平。

本丛书有：空间解析几何、高等代数、数学分析、高等几何、常微分方程、复变函数论、近世代数、实变函数论、微分几何、计算机与算法语言 BASIC、概率论与数理统计、计算方法等。本丛书既可供自学应试之用，也可供大专院校的本科在校生和函授生及业余大学学生使用。

本丛书由于水平所限，不当之处在所难免，我们热诚希望广大自学读者批评指正。

目　　录

第一部分　实变函数论

第一章　集　　合

自十九世纪末叶，康托（Cantor）引入集合观点以后，集合的理论即迅速地渗入到数学的许多部门，并成为近代数学的基础，也是实变函数论的基础。集合论本身现已成为数学的一个分支，但在本课程中仅根据需要介绍集合论的一些基本知识。

§1　集合及其运算

一、集合及其表示法

集合是数学中的一个基本概念，就象几何中的“点”和“直线”一样，要把“集合”究竟是什么说得很清楚并不是一件容易的事，好在“集合”这个概念在日常生活和数学中是经常遇到的，人们对它并不陌生，所以我们无需在什么是集合这个问题上过多纠缠，只对集合给出一种比较恰当的描述，这对我们学习本门课程是毫无影响的。

关于集合我们给予下述描述：

凡是具有某种特殊性质的，确定的事物的全体就是一个集合（或简称集）。

集合的概念在数学中是到处可见的，诸如

"自然数的全体"

"方程 $ax^2+bx+c=0$的根的全体"

"开区间 (a,b) 中点的全体"

等等都是集合。但要注意，并不是具有某种性质的事物的全体都是一个集合，例如

"比 1 大得多的数的全体"

就不是一个集合。因为"比 1 大得多的数"虽然也是一个特殊性质，但它是不确定的，究竟比 1 大到什么程度才算大得多呢？界限是不清楚的。给出一个数，它是否在这个比 1 大得多的数的全体里是无法判定的，因此它不能做为我们讨论研究的对象——集合。

任何事物对某一集合来说，或者属于该集合（即该事物是该集合中的事物），或者不属于该集合（即该事物不是该集合中的事物），二者必居其一，但不可得兼。

设 a 是一个事物，A 为一个集合，若 a 属于 A，则称 a 为 A 的元素，记作

$$a\in A \text{ 或 } A\ni a$$

若 a 不属于 A，则记作

$$a\notin A \text{ 或 } A\not\ni a \quad (\overline{a\in} A\text{或}A\overline{\ni} a)$$

例如　Q 为有理数集合，则$\frac{2}{3}\in Q$ 而 $\pi\notin Q$。

不含任何元素的集合称为空集，例如方程

$$x^2+1=0$$

的实根全体就是空集，我们用 ϕ 表示空集。

以后用大写字母 $A,B,X,Y,\cdots$表示集合，用小写字母

$a, b, x, y, \cdots$表示元素．但在讨论问题时，往往关系到集合的特征，所以也常用能够标出集合中元素特性的符号来表示集合，如以

$$\{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}$$

表示所有具有性质 p 的事物组成的集合。

例如，自然数集合可表示为

$$\{n \mid n \text{ 为自然数}\}$$

而

$$\{x \mid |x-x_0|<\varepsilon\} \quad (\varepsilon>0)$$

则表示与 x_0 的距离小于正数 ε 的所有实数组成的集合，即是开区间$(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$。

设 $f(x)$是(a,b)上的实值函数，则

$$\{x \mid x\in(a,b),\ f(x)>c\}$$

表示(a,b)中的使得函数$f(x)$的函数值大于 c 的所有自变量 x 组成的集合。

设A是一集合，当我们用通常的方法一个一个地去数A中的元素，若恰好数到某个自然数 n，A 中就再没有未经数过的元素时，则称集合A为**有限集**．此时A有 n 个元素，可以记作

$$A=\{a_1, a_2, \cdots,\ a_n\}$$

空集也称为有限集．不是有限集的集合称为**无限集**。

只有一个元素 a 的集合，记作$\{a\}$．a与$\{a\}$的含义不同，a表示元素，而$\{a\}$则表示由一个元素 a 组成的集合，并称作单元素集。

必须注意，$\{a,a,a,b,b\}$ 并不表示是有五个元素的集合，它只有两个元素 a 和 b，这个集合只能表示为$\{a,b\}$，不能表示为$\{a,a,a,b,b\}$。

二、集合间的包含关系

在集合理论中，集合间的包含关系是一个重要的概念，我们先看两个例子：

例 1　设二集合分别为 $A=(a,b]$，$B=[a,b]$，显然集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素。

例 2　设二集合为

$N=\{n\mid n$ 为自然数$\}$，$Q=\{r\mid r$ 为有理数$\}$，则 N 与 Q 之间也有 N 中元素都是 Q 中元素的性质。

现在将上述例子中反映出来的，一个集合的元素都是另一集合的元素这种性质给出一般的描述。

定义 1　（1）设 A,B 是二集合，若属于 A 的元素都属于 B，则称 A 包含于 B 或 B 包含 A，记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A$$

（2）若 A 包含于 B（$A\subseteq B$），则称 A 为 B 的**子集**。特别的，若 A 是 B 的子集，而 B 中又有元素不属于 A 时，则称 A 为 B 的**真子集**，记为

$$A\subsetneqq B \text{ 或 } B\supsetneqq A$$

由子集定义可知：

① 欲证 A 是 B 的子集（$A\subseteq B$），只须证明任一 $x\in A$，则有 $x\in B$；或任一 $x\notin B$，则有 $x\notin A$。

欲证 A 不是 B 的子集（记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$），只须证明存在 $x_0\in A$，但 $x_0\notin B$。

② 由空集定义可知，空集 ϕ 是任何集合的子集，即对任意集合 A，总有 $\phi\subseteq A$。（因为任一 $x\notin A$ 必有 $x\notin\phi$）。

例 3　直角三角形的集合是三角形的集合的子集。

例 4　$(-1,1]$和$[-1,1)$哪一个都不是另一个的子集。

例 5　设二集合为

$$E=\{x \mid \frac{1}{x}>0\},\quad F=\{x \mid x>0\}$$

则显然E是F的子集，同时F也是E的子集。

例 6　设 A,B,C 分别表示 $[a,b]$ 上可微，连续，黎曼(Riemann)可积函数组成的集合，则A是B的子集，B是C的子集，从而有 $A\subseteq B\subseteq C$。

定理 1　对于任意集合 A,B,C，恒有

(1) $A\subseteq A$;

(2) 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则有$A\subseteq C$。

证明　(1) 是明显的。今证 (2)，为此只须证明若 $x\in A$，则有 $x\in C$。

事实上，对任一$x\in A$，由已给条件 $A\subseteq B$ 知有 $x\in B$，再由条件 $B\subseteq C$ 知有 $x\in C$。即对任一$x\in A$，都有 $x\in C$，于是由子集定义知 $A\subseteq C$。

定义 2　设 A,B 是二集合，若A是B的子集且同时B也是A的子集时，则称A与B**相等**，记作

$$A=B$$

由二集合相等定义可知：

① 二集合 A,B 相等当且仅当它们的元素完全相同。否则，称 A,B **不相等**，且记为 $A\neq B$。

② 欲证 $A=B$，只须证明 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$。

例 7　$A=\{x \mid x$ 是 $x^2-5x+6=0$ 的根$\}$与$B=\{2,3\}$相等；例 5 中的二集合E和F也相等。

三、集合的并、交运算

在讨论问题时，由于某种目的常常需要将集合做各种各样

的合并或分解，即要进行集合的运算，为此我们给出下述概念。

定义 3 设 A、B 是二集合，用 A 与 B 中所有元素组成一个新集合，则称此新集合为 A 与 B 的**并集**，记作

$$A\cup B$$

即 $A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$（图 1—1(a)）。

定义 4 设 A、B 是二集合，用 A 与 B 所共有的元素组成一个新集合，则称此新集合为 A 与 B 的**交集**，记作

$$A\cap B$$

即 $A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$（图 1—1(b)）。

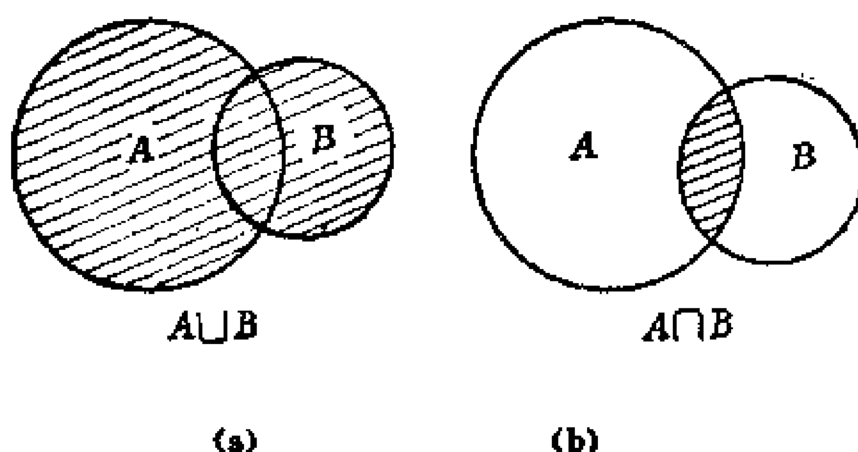


图1—1

例 8 设 $A=\{a,b,e\}$，$B=\{b,c,d\}$，$C=\{c,e,g\}$，$D=\{a,b,d,f\}$。

则 $A\cup B=\{a,b,e,c,d\}$

$B\cup C=\{b,c,d,e,g\}$

$C\cup D=\{a,b,d,f,c,e,g\}$

而

$A\cap C=\{e\}$，$A\cap D=\{a,b\}$，$B\cap D=\{b,d\}$，$C\cap D=\phi$

例 9 设 $A=[0,2)$，$B=\left[\frac{1}{2},3\right]$，则

$[A\cup B=[0,3]$，$A\cap B=\left[\frac{1}{2},2\right)$

设D是一个集合（有限集或无限集），如果对于D的每个元素 α，都有一个集合 A_α 与之对应，则由这些集合 A_α 组成的集合，称作以D为指标集的**集族**，记作

$$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D} \quad 或 \{A_\alpha \mid \alpha\in D\}$$

当不致发生误解时也可略去指标集而简记为$\{A_\alpha\}$。

所谓集族就是以集合为元素的集合，比如设 $N_n=\{1，2\cdots，n\}$，与 i 对应的集合为A_i，则以 N_n 为指标集的集族，就是以 A_1，$A_2\cdots,A_n$ 为元素的集合$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，即

$$\{A_i\}_{i\in N_n}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$$

定义 3 和定义 4 分别给出了两个集合的并集与交集概念，同样我们也可以定义有限多个集合，以及任意多个集合的并集与交集如下：

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个集合，用这 n 个集合的所有元素组成的新集合，称为 A_1，A_2，$\cdots,A_n$ 的并集，记作

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

即 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x \mid 存在某个\ k，1\leqslant k\leqslant n，使\ x\in A_k\}$。

用上述 n 个集合所共有的元素组成的新集合，称为A_1，$A_2\cdots,A_n$ 的交集，记作

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

即 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x \mid 对每个\ k，1\leqslant k\leqslant n，皆有\ x\in A_k\}$。

设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$是任意集族，用这个集族中的一切$A_\alpha$的所有元素组成的新集合，称为集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$的并集，记作

$$\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha \text{ 或简记为 } \bigcup A_\alpha$$

即 $\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha=\{x \mid \text{存在 } \beta\in D, \text{ 使 } x\in A_\beta\}$.

用这个集族中的一切A_α所共有的元素组成的新集合，称为集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$的交集，记作

$$\bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha \text{ 或简记为 } \bigcap A_\alpha$$

即 $\bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha=\{x \mid \text{对每个 } \alpha\in D, \text{ 都有 } x\in A_\alpha\}$.

特别地，设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是一列集合，则其并集与交集分别记作

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

由并集与交集定义可知：

① 如已知x属于一些集合中的某个集合，则知x必属于这些集合的并集；反之，如已知x属于一些集合的并集，则知x必至少属于这些集合中的某一个集合。

欲证x属于一些集合的并集，只须证明x属于这些集合中的某个集合。

欲证x不属于一些集合的并集，只须证明x不属于这些集合的每个集合。

②如已知x属于一些集合的每个集合，则知x必属于这些集合的交集；反之，如已知x属于一些集合的交集，则知x必属于这些集合的每个集合。

欲证x属于一些集合的交集，只须证明x属于这些集合的每个集合。

欲证 x 不属于一些集合的交集，只须证明 x 不属于这些集合中的某个集合。

③ 每个参加“并”运算的集合都是该并集的子集；交集是参加“交”运算的每个集合的子集。比如，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是一集族，则对任意 $\alpha\in D$，均有

$$A_\alpha\subseteq\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha,\qquad A_\alpha\supseteq\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha$$

例10 设 $A_i=\left[0,\frac{1}{i}\right)\ (i=1,2,\cdots,m)$，则

（1）$\bigcup_{i=1}^{m}A_i=[0,1)$，（2）$\bigcap_{i=1}^{m}A_i=\left[0,\frac{1}{m}\right)$

证明（1）只须证明 $\bigcup_{i=1}^{m}A_i\subseteq[0,1)$ 且 $\bigcup_{i=1}^{m}A_i\supseteq[0,1)$。

左$\subseteq$右 设 $x\in\bigcup_{i=1}^{m}A_i$，由并集定义应有 $i_0(1\leqslant i_0\leqslant m)$，使 $x\in A_{i_0}=\left[0,\frac{1}{i_0}\right)$。因为 $\left[0,\frac{1}{i_0}\right)\subseteq[0,1)$，所以 $x\in[0,1)$，故 $\bigcup_{i=1}^{m}A_i\subseteq[0,1)$。

左$\supseteq$右 设 $x\in[0,1)$，即 $x\in[0,1)=A_1$，因为 $A_1\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}A_i$，所以 $x\in\bigcup_{i=1}^{m}A_i$，故 $\bigcup_{i=1}^{m}A\supseteq[0,1)$。

综上得证 $\bigcup_{i=1}^{m}A_i=[0,1)$。

（2） 只须证明$\bigcap_{i=1}^{m} A_i \subseteq \left[0,\frac{1}{m}\right)$且$\bigcap_{i=1}^{m} A_i \supseteq \left[0,\frac{1}{m}\right)$。

左⊆右 设 $x\in \bigcap_{i=1}^{m} A_i$，由交集定义对每个 $i(1\leqslant i\leqslant m)$都有 $x\in A_i=\left[0,\frac{1}{i}\right)$，于是$x\in A_m=\left[0,\frac{1}{m}\right)$，故$\bigcap_{i=1}^{m} A_i \subseteq \left[0,\frac{1}{m}\right)$。

左⊇右 设 $x\in\left[0,\frac{1}{m}\right)$，即 $0\leqslant x<\frac{1}{m}$，因为对每个$i(1\leqslant i\leqslant m)$皆有$\frac{1}{m}\leqslant\frac{1}{i}$，从而对每个 i $(1\leqslant i\leqslant m)$皆有 $x\in\left[0,\frac{1}{i}\right)=A_i$，于是由交集定义知$x\in \bigcap_{i=1}^{m} A_i$，故$\bigcap_{i=1}^{m} A_i \supseteq \left[0,\frac{1}{m}\right)$。

综上得证$\bigcap_{i=1}^{m} A_i =\left[0,\frac{1}{m}\right)$。

例11 设 $A_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$，则

（1）$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=(-1,1)$， （2）$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\{0\}$。

证明 （1）这是显然的。

（2）左⊆右 设 $x\notin\{0\}$，即 $x\neq 0$，不妨设 $x>0$，于是有 n_0 使$0<\frac{1}{n_0}<x$，即 $x\notin \left(-\frac{1}{n_0},\frac{1}{n_0}\right)=A_{n_0}$，从而有

$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$，故$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\{0\}$.

左$\supseteq$右　设 $x\in\{0\}$，即 $x=0$，于是对任意 n，都有$x\in\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=A_n$，从而$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$，故$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\supseteq\{0\}$.

综上得证$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{0\}$.

例12　设 $A_n=(n-1,n]$ $(n=1,2,\cdots)$，则

（1）$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(0,\infty)$，（2）$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\phi$.

证明　（1）左$\subseteq$右　设 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，存在 n_0使$x\in A_{n_0}=(n_0-1,n_0]$，显然 $(n_0-1,n_0]\subseteq(0,\infty)$，故$x\in(0,\infty)$，所以左$\subseteq$右.

左$\supseteq$右　设 $x\in(0,\infty)$，即 $0<x<\infty$，于是存在 m，使 $m-1<x\leqslant m$，即 $x\in(m-1,m]=A_m\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，所以左$\supseteq$右.

（2）　左$\supseteq$右显然．只须证明左$\subseteq$右．这是明显的，因任取一自然数 k，则 $(k-1,k]\cap(k,k+1]=\phi$，从而$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\phi$（参加“交”运算的集合越“多”其交集越“小”）.

例13　设 $A_n=\left(-1-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=[-1,1].$$

证明 左$\subseteq$右 若 $x\notin[-1,1]$，即 $x<-1$或 $1<x$. 如 $1<x$. 则有n_0 使$1+\frac{1}{n_0}<x$，于是 $x\notin A_{n_0}$，所以 $x\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$，故$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq[-1,1]$，同理可证 $x<-1$ 时亦有$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq[-1,1]$.

左$\supseteq$右 设 $x\in[-1,1]$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$，显然对每个 n，都有 $x\in\left(-1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)=A_n$，从而 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$，故$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\supseteq[-1,1]$.

对于多个集合进行不同运算时，要用括号表明运算的先后次序，例如

$$A\cup B\cap C$$

若添加括号为

$$(A\cup B)\cap C$$

则表示先计算 $A\cup B$，然后再求它和C的交；若添加括号为

$$A\cup(B\cap C)$$

则表示先计算 $B\cap C$，然后再求A和它的并. 应当注意，一般来说两者不一定相等，即

$$(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$$

未必总成立. 例如

$A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$C=\{c\}$，$D=\{a,d\}$，则

$$(A\cup B)\cap C=\{a,b\}\cap\{c\}=\phi$$

$$A\cup(B\cap C)=\{a\}\cup\phi=\{a\}$$

$$(A\cup B)\cap D=\{a,b\}\cap\{a,d\}=\{a\}$$

$$A\cup(B\cap D)=\{a\}\cup\phi=\{a\}$$

定理 2 下列诸运算律成立：

（1）并的交换律：$A\cup B=B\cup A$；

（2）并的结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

（3）交的交换律：$A\cap B=B\cap A$；

（4）交的结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（5）并交分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

（6）并交幂等律：$A\cup A=A\cap A=A$；

（7）并交吸收律：$A\cap(B\cup A)=A\cup(B\cap A)=A$。

七个运算律的证法相同，只就（5）为例证明于下：

左$\subseteq$右　若 $x\in A\cap(B\cup C)$，由交集定义知有 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$，再由并集定义有 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in C$，从而（由交集定义）有 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$，于是（由并集定义）有 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，故有

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

左$\supseteq$右　若 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则（由并集定义）有 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$，于是（由交集定义）有 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in A$ 且 $x\in C$，从而有 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in C$。所以（由并集定义）有 $x\in A$ 且 $x\in(B\cup C)$，于是有 $x\in A\cap(B\cup C)$，故有

$$A\cap(B\cup C)\supseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

综上得证

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

必须注意

$$(A\cap C)\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(C\cup D)$$

未必成立。事实上，有

$$(A\cup B)\cap(C\cup D)=[(A\cup B)\cap C]\cup[(A\cup B)\cap D]$$
$$=(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup(A\cap D)\cup(B\cap D)$$

定理 3　设 A、B、C 是三个集合，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是一集族，则

（1） $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$；

（2） 若 $A_\alpha\subseteq C$ $(\alpha\in D)$，则 $\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\subseteq C$；

（3） 若 $A_\alpha\supseteq C$ $(\alpha\in D)$，则 $\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\supseteq C$。

证明 （1） 这是明显的。

（2） 设 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$，由并集定义应有 $\alpha_0\in D$，使 $x\in A_{\alpha_0}$，由条件知 $A_{\alpha_0}\subseteq C$，从而 $x\in C$，于是得证

$$\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\subseteq C$$

（3） 设 $x\in C$，由条件知对任意 $\alpha\in D$，都有 $x\in A_\alpha$，从而 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$，于是得证

$$\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha\supseteq C$$

定理 4 设 A 是一集合，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in E}$，$\{B_\beta\}_{\beta\in F}$ 是二集族，则

（1） $\bigcup\limits_{\substack{\alpha\in E\\ \beta\in F}}(A_\alpha\cup B_\beta)=(\bigcup\limits_{\alpha\in E}A_\alpha)\cup(\bigcup\limits_{\beta\in F}B_\beta)$；

（2） $A\cap(\bigcup\limits_{\beta\in F}B_\beta)=\bigcup\limits_{\beta\in F}(A\cap B_\beta)$；

（3） $\bigcup\limits_{\substack{\alpha\in E\\ \beta\in F}}(A_\alpha\cap B_\beta)=(\bigcup\limits_{\alpha\in E}A_\alpha)\cap(\bigcup\limits_{\beta\in F}B_\beta)$。

证明 （1） 左$\subseteq$右　设 $x\in\bigcup(A_\alpha\cup B_\beta)$，由并集定义应有 $\alpha_0\in E$，$\beta_0\in F$ 使 $x\in A_{\alpha_0}\cup B_{\beta_0}$。若 $x\in A_{\alpha_0}$，则因 $A_{\alpha_0}\subseteq\bigcup A_\alpha$（参与“并”运算的任一集都是该并集的子集），从而有 $x\in\bigcup A_\alpha$，显然更有 $x\in(\bigcup A_\alpha)\cup(\bigcup B_\beta)$；若 $x\in B_{\beta_0}$，由于 $B_{\beta_0}\subseteq\bigcup B_\beta$，从而也有 $x\in\bigcup B_\beta\subseteq(\bigcup A_\alpha)\cup(\bigcup B_\beta)$，得证左$\subseteq$右。

左$\supseteq$右　设 $x\in(\bigcup A_\alpha)\cup(\bigcup B_\beta)$，若 $x\in\bigcup A_\alpha$，则由并集定义应有 $\alpha_0\in E$ 使 $x\in A_{\alpha_0}$，从而任取 $\beta_0\in F$，有 $x\in A_{\alpha_0}\cup B_{\beta_0}$，于是有 $x\in\bigcup(A_\alpha\cup B_\beta)$，同理可证若 $x\in\bigcup B_\beta$ 也有 $x\in\bigcup(A_\alpha\cup B_\beta)$，得证左$\supseteq$右。

（2） 左$\subseteq$右　设 $x\in A\cap(\bigcup B_\beta)$，即 $x\in A$ 且 $x\in\bigcup B_\beta$。从而有 $\beta_0\in F$ 使 $x\in A$ 且 $x\in B_{\beta_0}$，即 $x\in A\cap B_{\beta_0}$，于是有

$x\in\bigcup(A\cap B_\beta)$。得证左$\subseteq$右。

左$\supseteq$右　设 $x\in\bigcup(A\cap B_\beta)$，于是有$\beta'\in F$，使 $x\in A\cap B_{\beta'}$，因为 $B_{\beta'}\subseteq\bigcup B_\beta$，从而有 $x\in A\cap(\bigcup B_\beta)$。得证左$\supseteq$右。

（3）左$\subseteq$右　设 $p\notin(\bigcup A_\alpha)\cap(\bigcup B_\beta)$，从而$p\notin\bigcup A_\alpha$或 $p\notin\bigcup B_\beta$，即 $p\notin A_\alpha(\alpha\in E)$或 $p\notin B_\beta(\beta\in F)$．所以对任意 $\alpha\in E$，$\beta\in F$ 恒有 $p\notin A_\alpha\cap B_\beta$，于是 $p\notin\bigcup(A_\alpha\cap B_\beta)$。

左$\supseteq$右　设 $p\notin\bigcup(A_\alpha\cap B_\beta)$，即对任意 $\alpha\in E$，$\beta\in F$ 恒有 $p\notin A_\alpha\cap B_\beta$，从而 $p\notin A_\alpha(\alpha\in E)$或 $p\notin B_\beta(\beta\in F)$，于是有 $p\notin\bigcup A_\alpha$ 或 $p\notin\bigcup B_\beta$。故有 $p\notin(\bigcup A_\alpha)\cap(\bigcup B_\beta)$。

四、差集与补集

定义 5　设 A、B 是二集合，只由属于A而不属于B的元素组成的新集合，称为B关于A的差集，记作

$$A-B \text{ 或 } A\setminus B$$

即 $A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且} x\notin B\}$。

由差集定义可知：

① 欲证 $x\in A-B$，只须证明 $x\in A$ 且 $x\notin B$。

欲证 $x\notin A-B$，只须证明 $x\notin A$ 或 $x\in A\cap B$。

② 对任意二集合 A、B，恒有

$A-B\subseteq A$，$(A-B)\cup B\supseteq A$（图1—2(a)(b)）。

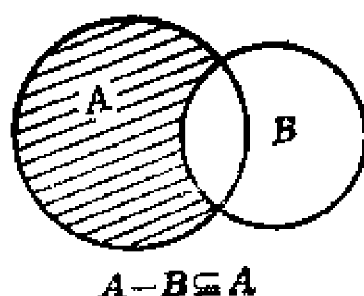
$(A-B)\cup B=A\cup B$，$A-B=A-(A\cap B)$。

特别地，当 $A\cap B=\phi$ 时，则有 $A-B=A$（图1—2(c)）。但一般说来，$(A-B)\cup B=A$ 未必成立。事实上，容易证明

$(A-B)\cup B=A$ 的充要条件是 $A\supseteq B$（图1—2(d)）。

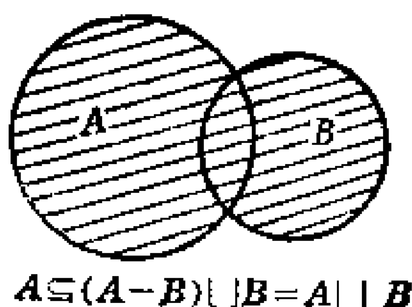
很明显，当 $A\supseteq B$ 时，B关于A的"差"运算将有些特殊性质，下面就此特殊情况做进一步的讨论。

定义 6　设 A、B 是二集合且 $A\supseteq B$，则称B关于A的差



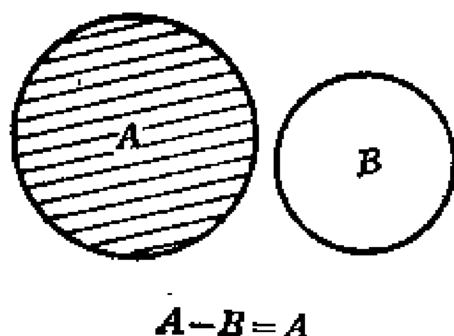
$A-B\subseteq A$

(a)



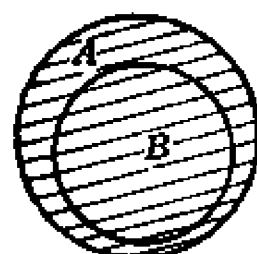
$A\subseteq(A-B)\cup B=A\cup B$

(b)



$A-B=A$

(c)



$(A-B)\cup B=A$

(d)

图1—2

集为B关于A的补集，记作

$$\mathscr{C}_A B$$

即 $\mathscr{C}_A B=\{x\mid A\supseteq B,\ x\in A-B\}$，亦即

$$\mathscr{C}_A B=\{x\mid A\supseteq B, x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

如已明确问题是在某集合S上讨论，若定义中的 A 等于S时，在不致发生混淆情况下，$\mathscr{C}_S B$ 可简记为 $\mathscr{C} B$，且简称为B的补集。

由差集与补集的定义可知，“补”运算是“差”运算的特殊情形，所以“差”的运算性质对于“补”运算自然成立。

定理 5

（1） $\mathscr{C} S=\phi$，$\mathscr{C}\phi=S$；

（2） $A\cup\mathscr{C} A=S$，$A\cap\mathscr{C} A=\phi$。

证明　（1）　这是显然的.

（2）　先证 $A\cup\mathscr{C}A=S$.

左$\subseteq$右　因 $A\subseteq S$ 且 $\mathscr{C}A\subseteq S$,从而由本节定理 3 知 $A\cup\mathscr{C}A\subseteq S$.

左$\supseteq$右　设 $x\in S$,若 $x\in A$,则有 $x\in A\cup\mathscr{C}A$; 若$x\notin A$,即 $x\in S$ 且 $x\notin A$,故由补集定义知 $x\in\mathscr{C}A$, 从而也有 $x\in A\cup\mathscr{C}A$, 故 $A\cup\mathscr{C}A\supseteq S$.

次证$A\cap\mathscr{C}A=\phi$. 只须证明A与 $\mathscr{C}A$ 没有公共元素.

事实上, 若 $x\in A$, 则由补集定义知 $x\notin S-A=\mathscr{C}A$（或 $x\in\mathscr{C}A=S-A$,则 $x\notin A$),于是得证 $A\cap\mathscr{C}A=\phi$.

定理 5 之（2）说明, 对于 S 的任意子集 A, S 中的元素必属于A与 $\mathscr{C}A$ 之一, 且仅属于二者之一.

定理 6

（1）$A\subseteq B$ 的充要条件是 $\mathscr{C}A\supseteq\mathscr{C}B$;

（2）$\mathscr{C}(\mathscr{C}A)-A$;

（3）$A-B-A\cap\mathscr{C}B$.

证明　（1）必要性　已知 $A\subseteq B$,往证 $\mathscr{C}A\supseteq\mathscr{C}B$.

设 $x\in\mathscr{C}B$,则 $x\notin B$, 因 $A\subseteq B$, 故必有 $x\notin A$,从而 $x\in\mathscr{C}A$,于是得证 $\mathscr{C}A\supseteq\mathscr{C}B$.

充分性　已知 $\mathscr{C}A\supseteq\mathscr{C}B$;往证 $A\subseteq B$.

设 $x\in A$,则 $x\notin\mathscr{C}A$,因 $\mathscr{C}A\supseteq\mathscr{C}B$,故必有$x\notin\mathscr{C}B$, 从而 $x\in B$,得证 $A\subseteq B$.

（2）左$\subseteq$右　设 $x\in\mathscr{C}(\mathscr{C}A)$, 则$x\notin\mathscr{C}A$,于是$x\in A$. 得证左$\subseteq$右.

左$\supseteq$右　设$x\in A$,则 $x\notin\mathscr{C}A$,于是有$x\in\mathscr{C}(\mathscr{C}A)$. 得证左$\supseteq$右.

（3）左$\subseteq$右　设 $x\in A-B$, 则 $x\in A$ 且 $x\notin B$, 即

$x\in A$ 且 $x\in \mathscr{C}B$，从而 $x\in A\cap \mathscr{C}B$。得证左$\subseteq$右。

左$\supseteq$右　设 $x\in A\cap \mathscr{C}B$，则 $x\in A$且 $x\in \mathscr{C}B$，即 $x\in A$且 $x\notin B$，从而 $x\in A-B$。得证左$\supseteq$右。

定理6之（1）说明，二集间的包含关系恰好与它们的补集间的包含关系相反；（2）说明对一个集合取两次"补"运算后还原为该集合；（3）说明，二集间的"差"运算可用相应的"交"运算来代替，从而可把"差"运算转化为"交"运算，这样就可以充分应用"交"的运算律而给某些问题的解决带来方便。

定理7（笛摩根公式*）设 A、B 是二集合，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in E}$ 是一集族，则

（1）$\mathscr{C}(A\cup B)=\mathscr{C}A\cap \mathscr{C}B$，$\mathscr{C}(A\cap B)=\mathscr{C}A\cup \mathscr{C}B$；

（2）$\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha\in E}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in E}\mathscr{C}A_\alpha$，$\mathscr{C}(\bigcap\limits_{\alpha\in E}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in E}\mathscr{C}A_\alpha$。

（并的补＝补的交）　（交的补＝补的并）

证明　因证法相同故仅以（2）的第二式为例。

左$\subseteq$右　设 $x\in \mathscr{C}(\cap A_\alpha)$，由补集定义知有 $x\notin \cap A_\alpha$，于是有 $\alpha_0\in E$ 使 $x\notin A_{\alpha_0}$（若对任意 $\alpha\in E$，恒有 $x\in A_\alpha$，则有 $x\in \cap A_\alpha$，矛盾），从而 $x\in \mathscr{C}A_{\alpha_0}$，所以 $x\in \cup \mathscr{C}A_\alpha$。得证左$\subseteq$右。

左$\supseteq$右　设$x\in \cup \mathscr{C}A_\alpha$，由并集定义应有$\alpha'\in E$使$x\in \mathscr{C}A_{\alpha'}$，从而 $x\notin A_\alpha$，于是由交集定义知，必有 $x\notin \cap A_\alpha$，所以 $x\in \mathscr{C}(\cap A_\alpha)$。得证左$\supseteq$右。

定理7给出的等式：

并的补＝补的交；交的补＝补的并提供了一种"对偶方法"，它能将已证明的关于集合的某种性质转移到它们的补集

---

* De Morgan 公式。

上去，在以后的学习中将会看到这样的例子。

习　　题

1．设 $A_i=(0,i]$ $(i=1,2,\cdots)$，则

(1) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=(0,\infty)$；　(2) $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=(0,1]$。

2．试证 (1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right)=(0,1)$；(2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n}\right)=\{1\}$。

3．试证　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，且举一个

$$(A\cap C)\cup(B\cap D)\neq(A\cup B)\cap(C\cup D)$$

的例子．

4．试证 $(A-B)\cup B=A$ 的要充条件是 $A\supseteq B$。

5．(1) 设 $A\subseteq B\subseteq S$，则 $S=B\cup\mathscr{C}_S A$；

(2) E、T 是二集合，则有

$T=(T\cap E)\cup(T\cap\mathscr{C}E)$；$E=(E\cap T)\cup(E\cap\mathscr{C}T)$。

6．设 A 是一集合，$\{A_n\}$，$\{B_n\}$ 是二集列，则

(1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)=\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)$；

(2) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)\subseteq\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)$；

(3) $A\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)$。

7．证明 $\{x\mid x>0\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid x>\frac{1}{n}\right\}$。

8．设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数，则对任意实数 α，有

$$\{x \mid f(x)=\alpha\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid \alpha \leqslant f(x)<\alpha+\frac{1}{n}\right\}$$

9．（1）$(G-E_1)\cup(G-E_2)=G-(E_1\cap E_2)$；

（2）$(G-E_1)\cap(G-E_2)=G-(E_1\cup E_2)$．

10．设 E_1、E_2 是二集合，且 $E_1\subseteq G$，则

$E_1-E_2=G-[(E_1\cap E_2)\cup(G-E_1)]$

§2 集合的基数

一、比较集合中元素多少的方法

当我们不考虑集合中元素的性质而抽象地研究集合时，集合中所含元素的多少应该是一个最基本的概念．比如一个由八只椅子组成的集合，和一个由八本书组成的集合，当然是两个不同的集合．但是当我们不去计较它们的元素（椅子和书）的具体属性时，则有一点却是共同的，即它们的元素个数相同，都是由八个元素组成的集合．而一个由八只椅子组成的集合与另一个由六只椅子组成的集合，虽然它们都是由椅子组成的集合，但它们的元素个数却不相同．可见抽象地研究集合时，集合中所含元素的多少则是一个集合的非常值得重视的属性．

对于两个有限集合，我们要比较它们所含元素的多少时，一般可有两种方法．例如，我们要考察某教室中的椅子和桌子的个数是否相等，若不相等究竟哪个多时．显然我们可以用通常的方法，把椅子和桌子分别的数一下就能得出结果来了；但也可以采取另外一种方法，比如我们可以把一只椅子恰好配上一张桌子．这样一一配对之后，如果还有椅子再没有桌子与它

配对，这当然说明椅子比桌子多．反之，如果还有桌子而再没有椅子和它配对，就是桌子比椅子多了；如果椅子和桌子刚好都一一的配成了对，当然这就是说二者的个数是相等的。

我们不妨把前一种方法称作"分别数数法"，后一种方法称作"一一配对法"．当比较两个有限集的元素个数的多少时，上述两种方法显然都是行之有效的，但对两个无限集合来说，再用"分别数数法"显然就不行了，但仍可用"一一配对法"来解决问题，因此我们将在下一段里进一步深入地讨论这种方法。

二、映射及双射

我们知道全体自然数集合N和全体有理数集合Q都是无限集合．如果要问这两个集合的元素哪个多？人们往往会凭直观印象而做出Q的元素比N的元素多的回答，因为自然数是有理数，而有理数不一定是自然数．事实上，若用"一一配对法"来比较它们所含元素的多少时，就会发现其结果并非如此．为了更深刻地讨论这类问题，我们将把"一一配对法"描述为一般的数学形式，为此先把函数概念加以推广．

定义 1 设 A、B 是二非空集合；f 是 A、B 元素间的一个对应法则，如果对任一 $a\in A$，依对应法则 f 在 B 中有唯一确定的元素 b 与 a 相对应，则

（1）称对应法则 f 为定义在A上而在B中取象(值)的**单值映射**（**简称映射**），记作

$$f:A\longrightarrow B,\quad a\longmapsto b\quad (a\in A,\ b\in B)$$

并称A为映射 f 的**原象域**（**定义域**），B为 f 的**象域**(**值域**)

（2）依照映射 f，若B中的 b 与A中的 a 相对应，则称 b 为 a 的**象**(**值**)点，记作

$$f(a)=b$$

此时称 a 为 $f(a)=b$ 的原象(定义)点。

显然象域中的元素未必都有原象点，而原象域中的不同元素可能有相同的象点。

定义 2 设 $f:A\longrightarrow B$, $a\longmapsto f(a)=b$, 即 f 是以 A 为原象域以 B 为象域的映射，则

（1）如果象点全体组成的集合 $f[A]$ 等于 f 的象域 B，即

$$f[A]=\{f(a)\mid a\in A\}=B$$

时，则称 f 为“从 A 到 B 上”的映射（简称满射）。

（2）如果象域 B 中的元素有原象点时，原象点必是唯一的，则称 f 为“一一映射”（简称单射）。

定义 3 设 $f:A\longrightarrow B$, $a\longmapsto f(a)=b$, 则

（1）若 f 既是满射又是单射时，则称 f 为“一一到上”的映射（简称双射）。

（2）若 f 是双射，对任一 $b\in B$，必有唯一的 $a\in A$ 使 $b=f(a)$，从而我们可以定义一个从 B 到 A 上的映射，即对任一 $b=f(a)\in B$，令 a 与 b 相对应。称此映射为 f 的逆映射，记作

$$f^{-1}:B\longrightarrow A,\ b\longmapsto f^{-1}(b)=a$$

从上述定义可知，若 $f:A\longrightarrow B$ 是双射，显然 $f^{-1}:B\longrightarrow A$ 也是双射。

类似于数学分析中的复合函数概念，也可以给出复合映射定义如下：

设 $f:A\longrightarrow B$, $x\longmapsto f(x)$; $g:B\longrightarrow C$, $y\longmapsto g(y)$，对任一 $x\in A$，令

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

显然这是从A到C的一个映射，称此映射为f和g的复合映射，记作

$$g\circ f: A\longrightarrow C,\quad x\longmapsto g(f(x))$$

三、集合的基数

定义4 设A、B是二集合，若A、B间存在一个双射

$$f: A\longrightarrow B,\quad a\longmapsto f(a)=b$$

则称A与B对等，记作

$$A\sim B$$

由对等定义可知：

① 欲证二集合对等，只须在两个集合间构造出一个双射.

② $A\sim B$与$A=B$有本质的不同，显然$A=B$必有$A\sim B$，但$A\sim B$却未必有$A=B$. 比如

$$A=\{1,3,5,7,9\},\quad B=\{2,4,6,8,10\}$$

当令

$$f: A\longrightarrow B,\quad a\longmapsto f(a)=a+1$$

时则f显然是双射，故$A\sim B$，但$A\neq B$.

例1 设A是一集合，对任一$a\in A$，令a与其自身相对应，显然这种对应法则是从A到A的一个映射，记作

$$I: A\longrightarrow A,\ a\longmapsto I(a)=a$$

称此映射为恒等映射. 很明显恒等映射I既是满射又是单射，从而是双射. 故任意集A必与其自身对等.

例2 $[0,1]\sim[0,10]$.

只须作映射

$$f:[0,1]\longrightarrow[0,10],\quad x\longmapsto f(x)=10x$$

则f是双射.

先证f是满射。由满射定义知只须证明对任意 $y\in[0,10]$，y 必有原象点。

事实上，对任一 $y\in[0,10]$，有$0\leqslant y\leqslant 10$，从而 $0\leqslant\frac{y}{10}\leqslant 1$，于是存在 $x=\frac{y}{10}\in[0,1]$，使

$$f(x)=10x=y$$

故 f 是满射。

次证 f 是单射。由单射定义知只须证明原象点不同象点也不同（或象点相同原象点亦必相同）。

对任意 $x,x'\in[0,1]$，$x\neq x'$，显然有

$$f(x)=10x\neq 10x'=f(x')$$

所以 f 是单射。综上得证 f 是双射。

例 3　$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\sim(-\infty,+\infty)$。

显然映射 f：$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow R$，$x\longmapsto f(x)=\operatorname{tg}x$即是双射。

例 4　设 $N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，$N_0=\{2,4,6,\cdots 2n,\cdots\}$，则 $N\sim N_0$。

映射 $f:N\longrightarrow N_0$，$n\longmapsto f(n)=2n$ 即是双射。

很明显，对于任何有限集，它的元素必不能和它的真子集的元素同样多，所以任何有限集必不能和它的真子集对等。但由上述例子可看出，无限集却可能与它的真子集集对等。事实上以后我们还要证明任何一个无限集必然要和它的一个真子集对等，因此能与一个真子集对等恰是无限集有别于有限集的特征性质。

两个集合对等，依“一一配对法”的观点，这就意味着它们有“同样多”的元素。而无限集合必与其一真子集对等，这

就意味着无限集能与它的一个真子集有“同样多”元素，这不符合我们的习惯认识，但这确是事实。因之在我们讨论无限集的问题时，必须慎重，不能单凭直观想象而轻易的给出论断。

例 5　设 S 是一集合，A 为 S 的任一子集，作 S 上的函数

$$f_A(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x\in A \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } x\in S-A \text{ 时}\end{cases}$$

则称此函数 $f_A(x)$ 为子集 A 的特征函数。

用 M 表示集合 S 的所有子集组成的集族，E 表示 S 的所有子集的特征函数组成的函数族。即

$$M=\{A\mid A\subseteq S\},\quad E=\{f_A(x)\mid A\subseteq S\}$$

则
$$M\sim E$$

事实上，令

$\Phi: M\longrightarrow E,\ A\longmapsto\Phi(A)=f_A(x)$

则 Φ 即是一个双射。

对任一 $f_B(x)\in E$，则 $f_B(x)$ 是 S 的子集 B 的特征函数，从而 $B\in M$，且有 $\Phi(B)=f_B(x)$，故 Φ 是满射。

对任意 $A, A'\in M$ 且 $A\neq A'$，则

$$\Phi(A)=f_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\in S-A,\end{cases}\quad (\Phi A')=fA'(x)=\begin{cases}1 & x\in A'\\ 0 & x\in S-A'\end{cases}$$

因 $A\neq A'$，显然有

$$\Phi(A)=f_A(x)\neq f_{A'}(x)=\Phi(A')$$

故 Φ 是单射。

综上得证 Φ 是双射。

由对等定义显然下面的定理成立。

定理 1

（1）$A\sim A$（反身性）；

（2）若 $A\sim B$，则 $B\sim A$（对称性）；

（3）若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$（传递性）。

该定理表明：对等关系是等价关系。

凡彼此对等的集合，我们说它们有相同的**基数**。集合A的基数记作$\overline{\overline{A}}$。若 $A\sim B$，即A与B有相同基数，便记作$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$。对于有限集 A,B，显然 $A\sim B$ 的充要条件是它们所含元素的个数相同，所以当A是有限集时，$\overline{\overline{A}}$就是A中所含元素的个数，从而$\overline{\overline{\phi}}=0$。

集合的基数是集合的一个性质，可以粗略地把它理解为有限集元素个数这一概念的推广，它是表示集合所含元素的多寡程度的。以后我们即将看到同是无限集，它们所含元素的多寡程度并不全都一样，因此我们需要考虑基数间的大小问题。二集合的基数"相等"已经给出了定义，下面进一步讨论两集合基数"不等"的情形。

定义5 设 A、B 是二集合，若

(i) 存在集合 $C\subseteq B$ 使 $A\sim C$；

(ii) A与B不对等。

则称A的基数小于B的基数，记作

$$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}} \text{ 或 } \overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$$

所谓A与B不对等是指A与B间不存在任何双射。

很明显，上述基数大小的定义确实是有限集合的元素个数多少这一概念的推广。

定理2 设 A,B 是二集合，若有A的子集 A^* 及 B 的子集 B^*，使 $A\sim B^*$ 且 $B\sim A^*$，则 $A\sim B$。

这一定理通常称为伯恩斯坦(Bernstein)定理。它的证明比较复杂，故此略去（可参看主要参考文献[1]）。

推论1 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$不可能两个同时成立。

证明 读者自证。

基数有时也称作“势”，“蕴度”，“浓度”，“权”等。

习　　题

1．试证 $(0,1)\sim(a,b)$，$(0,1)\sim(0,\infty)$．

2．试证 $(-1,1)\sim(-\infty,\infty)$．

3．试证 $(0,1)\sim[0,1]$．

4．证明将圆周上去掉一点后，余下的点所成的集与实数对等．

5．证明将一球面去掉一点以后，余下的点所成的集合和整个平面上的点所作成的集合是对等的．

§3　可列集合

自然数集合

$$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

显然是一个无限集，实际上它是所有无限集中最简单的一个，但它在无限集中却占有非常重要的地位．

定义 1　凡与自然数集合 N 对等的集合，皆称之为**可列集合（或简称可列集）**．可列集合的基数称为**可列基数**，记作 a．

由可列集合定义可知：

若集合 A 是可列集合，即 A 与 N 对等，于是由对等定义知，A 中元素必能和自然数一一对应起来．若 $a\in A$ 与 $n\in N$ 对应，就用 n 作为 a 的下标，则 A 的元素能排列成无限序列

$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots\}$ $(i\neq j$ 时 $a_i\neq a_j)$，（1）的形式．

反之，若 A 的元素能排列成式（1）形式，当令 A 中元素与它的下标相对应时，显然这种对应法则是从 A 到 N 的双射，故 $A\sim N$，从而 A 是可列集．所以可列集就是它的元素能排列

成式（1形式的集合。

下面一些集合都是可列集：

$$A=\{1,3,5,7,\cdots,2n-1,\cdots\}$$

$$B=\{1,8,27,64,\cdots n^3,\cdots\}$$

$$C=\left\{1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$$

$$D=\{10,10^2,10^3\cdots,\ 10^n,\cdots\}$$

事实上，可分别作映射

$$f_1:\ N\longrightarrow A,\ \ n\longmapsto f_1(n)=2n-1$$

$$f_2:\ N\longrightarrow B,\ \ n\longmapsto f_2(n)=n^3$$

$$f_3:\ N\longrightarrow C,\ \ n\longmapsto f_3(n)=\frac{1}{n}$$

$$f_4:\ N\longrightarrow D,\ \ n\longmapsto f_4(n)=10^n$$

显然映射 f_1,f_2,f_3,f_4 都是双射，从而 A,B,C,D 都与N对等，故它们都是可列集。

定理1 任意无限集 A，都包含一可列子集。

证明 因A是无限集，故 $A\neq\phi$。从A中任取一元素记为 a_1，因A是无限集，从而 $A\neq\{a_1\}$，故 $A-\{a_1\}\neq\phi$。于是可从 $A-\{a_1\}$ 中再任取一元素记作 a_2，显然 $a_2\neq a_1$，且 $A-\{a_1,a_2\}\neq\phi$。重复上述作法，假设已从A中取出了互不相同的 n 个元素

$$a_1,\ a_2,\cdots,a_n\ (a_i\in A,\ \ i=1,2,\cdots,n)$$

则因A是无限集，所以 $A-\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\neq\phi$，从而可从

$$A-\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

中取一元素 a_{n+1}，a_{n+1} 自然不同于 $a_1,a_2,\cdots$，a_n。所以由归纳法，我们取得一个由A中互异元素作成的无限序列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\ \ (i\neq j\ \text{时}\ \ a_i\neq a_j)$$

则 $A^*=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 是可列集且 $A^*\subseteq A$，于是定理得证。

定理1说明可列集的基数，是无限集的基数中之最小的。

定理 2 可列集的任何无限子集仍是可列的。

证明 1° 设A是可列集，于是A的元素可排列成各项互异的无限序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n \quad (i\neq j \text{ 时 } a_i\neq a_j) \qquad (1)$$

2° 如果 A^* 是A的一个无限子集，则因 A^* 中元素必是A的元素，所以 A^* 的元素必都被列在式（1）中，从而我们可以从式（1）的序列中把 A^* 的元素挑出来，并重新给它们编上新下标 $n_1, n_2, \cdots$（保持原下标的大小关系）。

因为 A^* 是A的无限子集，所以在新下标中不可能有最大的（如有最大新下标 n_{m_0}，则 A^* 成为只有 m_0 个元素的有限集了），于是 A^* 的全部元素可排列为

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots \quad (n_l\neq n_m \text{ 时 } a_{n_l}\neq a_{n_m})$$

于是知 A^* 是可列的，定理证毕。

推论 1 任意可列集A除去一个有限子集 M，所得的差集 $A-M$ 仍是可列集。

推论 2 可列集A的任意子集 A^* 是至多可列的，即 A^* 或为有限集或为可列集。

定理 3 A为可列集，B为有限集，且 $A\cap B=\phi$，则 $A\cup B$仍是可列集。

证明 设 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$，$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$（$i\neq j$ 时 $a_i\neq a_j$）。

则

$$A\cup B=\{b_1, b_2, \cdots, b_k, a_1, a_2, \cdots, a_n\cdots\}$$

我们按下述规则把 $A\cup B$ 的元素编上新下标。即$A\cup B$的

每个 b_j 的下标不变，而把每个 a_m 的下标皆加以 k，于是有

$$A\cup B=\{b_1, b_2, \cdots, b_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_{k+m}, \cdots\}$$

因 $A\cap B=\phi$，故在上述无限序列中，不同下标所标志的元素也不同，于是 $A\cup B$ 是可列集，定理得证。

定理 4 设 A、B 皆为可列集，且 $A\cap B=\phi$，则 $A\cup B$ 仍为可列集。

证明 设

$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ （$i\neq j$ 时， $a_i\neq a_j$）

$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$ （$m\neq k$ 时，$b_m\neq b_k$）

我们按下述图示规律

$$\begin{array}{l} A=\{a_1, \; a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\} \\ \quad\;\;\; \downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \\ B=\{b_1, \; b_2, \; b_3, \cdots, b_n, \cdots\} \end{array}$$

显然可以把 $A\cup B$ 表示为

$$A\cup B=\{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots\} \quad (1)$$

因 $A\cap B=\phi$，所以实际上式（1）已说明 $A\cup B$ 的元素可排列成各项互异的无限序列了。

事实上，当把式（1）中 a_i 的下标 i 代之以 $2i-1$，b_i的下标代以 $2i$，且把 a 和 b 皆改用 c，则式（1）即变成为

$A\cup B=\{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n, \cdots\}$ （$m\neq k$时， $c_m\neq c_k$）

于是得证 $A\cup B$ 是可列集．定理证毕。

推论 3 设A是可列集，B是有限集或可列集，则 $A\cup B$ 仍是可列集。

证明 令 $B^*=B-(A\cap B)$，则 B^* 为至多可列集（推论 2），且 $A\cap B^*=\phi$，$A\cup B=A\cup B^*$，故由前面定理知 $A\cup B$ 是可列集。

推论 4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是可列集或有限集，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 是可列集或有限集．且如至少有一个 A_i 不是有限集，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 必是可列集．

证明 应用定理 3 、 4 及推论 3 即得证．

定理 5 设 A_i $(i=1,2,\cdots)$ 皆为可列集，且 $A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 仍是可列集．

证明 因 A_i $(i=1,2,\cdots)$ 都是可列集，故对每个 i，可把A_i 写成

$$A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \cdots, a_{in} \cdots\} \quad (im \neq ik,\ a_{im} \neq a_{ik}),$$

于是可按下述规律：

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{11}, \rightarrow a_{12}, a_{13}, \rightarrow \cdots\} \\
A_2 &= \{a_{21}, \quad a_{22}, a_{23}, \quad \cdots\cdots\} \\
A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \quad \cdots\cdots\} \\
&\cdots \quad \cdots \cdots \quad \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

把 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 的全部元素排列成各项互异的无限序列．即

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \cdots\}$$

从而得证 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可列集．

推论 5　设 A_i $(i=1,2,\cdots)$ 都是可列集，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 仍是可列集。

证明　考虑到定理 5，显然只须将 $A_i (i=1,2,\cdots)$ 中重复的元素，仅留下最先出现者余皆去掉。为此，令

$$
\begin{aligned}
&A_1^* = A_1 \\
&A_2^* = A_2 - A_1 \\
&A_3^* = A_3 - (A_1 \cup A_2) \\
&\cdots\cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&A_i^* = A_i - \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right) \\
&\cdots\cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned}
$$

显然每个 A^*_i 都是至多可列的，且 $A^*_1 = A_1$ 可列，特别的有

$$A^*_i \cap A^*_j = \phi \quad (i \neq j), \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^*$$

又因 $A_1 = A^*_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A^*_i$，所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^*$ 不可能是有限集。

另一方面，如果每个 A^*_i 都是可列集，则由定理 5 知 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A^*_i$ 是可列集；如果有某些 A^*_i 是有限集，则显然 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^*$ 可视作一个可列集的无限子集，仍是可列集，从而得证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可列集。

定理 6　有理数集 Q 是可列集。

证明　我们用 Q^+，Q^- 分别表示正有理数集和负有理数

集，显然有

$$Q^+\sim Q^-, \text{且 } Q=Q^+\cup Q^-\cup\{0\}.$$

所以只须证得 Q^+ 或 Q^- 是可列集．

因为每个有理数 r 都可写成既约分数的形式

$$r=\frac{p}{q}\quad(q>0)$$

故令

$$A_m=\left\{\frac{1}{m},\ \frac{2}{m},\ \frac{3}{m},\cdots,\frac{n}{m},\ \cdots\right\}\quad(m=1,2,\cdots)$$

显然对每个固定的m，A_m 是一可列集，特别有 $Q^+=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}A_m$．于是由推论5知 Q^+ 是可列集，从而 Q^- 也是可列集，从而

$$Q=Q^+\cup Q^-\cup\{0\}$$

是可列集．定理得证．

有理数集可列及其在实数集中稠密等性质非常重要，读者应特别注意．

定理7 设集合 A 中的元素都可用有限多个自然数作成的（有序）数组来标号，即 A 中的每个元素都可写成

$$a_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$$

的形式．这里 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 皆是自然数，k 可以是任意自然数，则 A 是有限集或可列集．

证明 证明较复杂在此从略，我们将在本章学习参考部分中给出它的证明．

关于定理7应注意下述问题：

① 定理的条件要求：用来标号的两个自然数组，尽管它们所含的自然数相同，但其排列先后次序不同时，则认作是两

个不同的数组，即它们所标号的元素是不同的，例如 $a_{1,3,2}$ 不同于 $a_{1,2,3}$。

② 虽然用来标号的自然数组中所含自然数的个数 k 可以是任意正整数，而且对于不同的元素 k 还可以不同，但是却必须每一次都是用有限多个自然数，因之象 $(p_1, p_2, \cdots, p_m, \cdots)$ 这样的由无限多个自然数组成的数组是不能用来标号的。

③ 虽然用来标号的自然数组 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ 中的任一 n_i 可以是任意的自然数，但对每个 i 并不要求 n_i 必须取遍所有自然数。

④ 定理 7 完全包含了定理 3，定理 4，定理 5 和定理 6。比如以定理 5 为例，只须注意到 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 中的元素 a_{mn}（A_m 中的第 n 个元素）事实上是由两个自然数 m 和 n 来标号的就可以了。

习　　题

1、证明平面上和三维空间中坐标为有理数的点组成的集合都是可列集。

2、直线上互不相交的开区间组成的开区间族是至多可列族。

3、单调函数的不连续点组成的集合是至多可列集合。

4、直线上以有理点为心，有理数为半径的所有开区间组成的族是可列族。

5、直线上以有理点为端点的所有开区间组成的族是可列族。

6、若 A 是可列集合，则 A 的所有有限子集做成的族仍是可列的。

7、所有系数为有理数的多项式组成的集合是可列集。

§4 不可列集合

在§2中我们虽然讨论了基数的大小关系，但却没有证明过确实存在着基数不相等的无限集的问题．而在§3中我们又证明了象在实数轴上处处密集的有理数集竟然也是可列集，即它仍能和自然数集对等．这就可能造成一种错觉，使得人们去猜想大概所有无限集都将是可列的．本节的主要内容就是要用具体事例来说明这种猜想完全不符合事实．

定理1 区间$[0,1]$是一个不可列集．

证明（反证法）若定理结论不成立，即假设$[0, 1]$是可列集（显然$[0,1]$不会是有限集），从而$[0,1]$的全部点能排列成两两互异的无限序列，即可写为

$$[0,1]=\{x_1,x_2,\ \cdots,x_n,\cdots\}\ (i\neq j\text{时},\ x_i\neq x_j)\quad(1)$$

下面来找出矛盾．为此，只须从$[0, 1]$中找出一点，使它不等于式（1）右端序列中的每一项．我们用闭区间套定理来找所求的点．

在$[0,1]$内部取闭区间 I_1，使 I_1的长度$|I_1|<\frac{1}{2}$而且使$x_1\notin I_1$（显然这样的 I_1 能够取到），然后我们再在 I_1 内部取一闭区间 I_2，使 $|I_2|<\frac{1}{2^2}$且使 $x_2\notin I_2$，显然此时也有 $x_1\notin I_2$．重复上述作法，一般说来设已取得闭区间 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 满足

$$\text{(i)}\quad I_1\supseteq I_2\supseteq I_3\supseteq\cdots\supseteq I_n;$$

$$\text{(ii)}\ |I_k|<\frac{1}{2^k},\ \text{且}\ x_k\notin I_k\ (k=1,2,\cdots,n).$$

则显然在 I_n 内部可取到闭区间 I_{n+1}，使

$$|I_{n+1}|<\frac{1}{2^{n+1}}\text{且使 } x_{n+1}\notin I_{n+1}$$

于是我们取得了一个闭区间套：

(i) $I_1\supseteq I_2\supseteq I_3\supseteq\cdots\supseteq I_n\supseteq\cdots$;

(ii) $|I_n|<\frac{1}{2^n}$, 且 $x_n\notin I_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

因为$\frac{1}{2^n}\to 0$ $(n\to\infty)$，从而 $|I_n|\to 0(n\to\infty)$，故由数学分析中著名的闭区间套定理知，必有一点 α 属于所有的闭区间 I_n。

显然 $\alpha\in[0,1]$，故由假设知 α 应是无限序列式（1）中的某一点，即必存在 m 使 $\alpha=x_m$，但由 I_m 的取法则有 $\alpha=x_m\notin I_m$，这就和 α 属于所有的 I_n 相矛盾。故〔0，1〕不是可列集。

定义1 凡与〔0，1〕对等的集合称为**连续集**．连续集的基数称为**连续基数**，记作 c．

推论1 c 为连续基数，a 为可列基数，则 $c>a$。

证明 由基数的大小定义可知，只须证明〔0，1〕有可列子集且〔0，1〕与可列集不对等。

事实上，由定理1知〔0，1〕不是可列集，从而〔0，1〕与可列集不对等。

另一方面，〔0，1〕有子集

$$E=\left\{1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\ \cdots\right\}$$

我们从§3的例子中已知E是可列集．于是E和〔0，1〕的子集E本身对等，但E不与〔0，1〕对等，从而由§2基数大小的定义知有

$$c=\overline{\overline{[0,1]}}>\overline{\overline{E}}=a$$

引理1 设 $\{A_n\}_{n\in N}$，$\{B_n\}_{n\in N}$ 是二集列，且满足

(i) 对任意 $n\neq n'$，有 $A_n\cap A_{n'}=\phi$，$B_n\cap B_{n'}=\phi$；

(ii) 对任意 $n\in N$，有 $A_n\sim B_n$。

则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\sim\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

证明 因 $A_n\sim B_n$ $(n=1,2,\cdots)$，从而存在

$$\text{双射 } f_n: A_n\longrightarrow B_n \ (n=1,2,\cdots)$$

作映射

$$f: A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\longrightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n=B$$

使当 $x\in A_n$ 时，$f(x)=f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$。则 f 是从 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 到 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 的双射。

事实上，对任一 $b\in B$，存在 n_0 使 $b\in B_{n_0}$，因为 $A_{n_0}\sim B_{n_0}$，故有 $a\in A_{n_0}$ 使 $f_{n_0}(a)=b$，于是由 f 定义知有 $a\in A$ 且 $f(a)=f_{n_0}(a)=b$。从而 f 是满射。

另一方面，设任意 $a,a'\in A$，$a\neq a'$，则有 n_0,n' 使 $a\in A_{n_0}$，$a'\in A_{n'}$。

当 $n_0\neq n'$ 时，则 $f(a)=f_{n_0}(a)=b\in B_{n_0}$，$f(a')=f_{n'}(a')=b'\in B_{n'}$，因 $B_{n_0}\cap B_{n'}=\phi$，所以 $f(a)=b\neq b'=f(a')$；

当 $n_0=n'$ 时，则 $f(a)=f_{n_0}(a)=b\in B_{n_0}$，$f(a')$ $f_{n_0}(a')=b'\in B_{n_0}$，但 f_{n_0} 是单射，且 $a\neq a'$，故有

$$f(a)=f_{n_0}(a)\neq f_{n_0}(a')=f(a')$$

总之 f 是单射。

综上知 f 是双射，于是定理得证。

定理 2　设A为无限集,M为有限集或可列集,则$(A\cup M)\sim A$。

对此定理的证明思路先作一点分析，若 $A\supseteq M$ 结论显然成立。否则如能在A中取一子集E使$(E\cup M)\sim E$, 由图 1—3 不难看出问题就得到了解决。为了使A的子集E具有$(E\cup M)\sim E$的性质，注意到M是至多可列的，由此自然想到只要E是可列集就能满足要求。

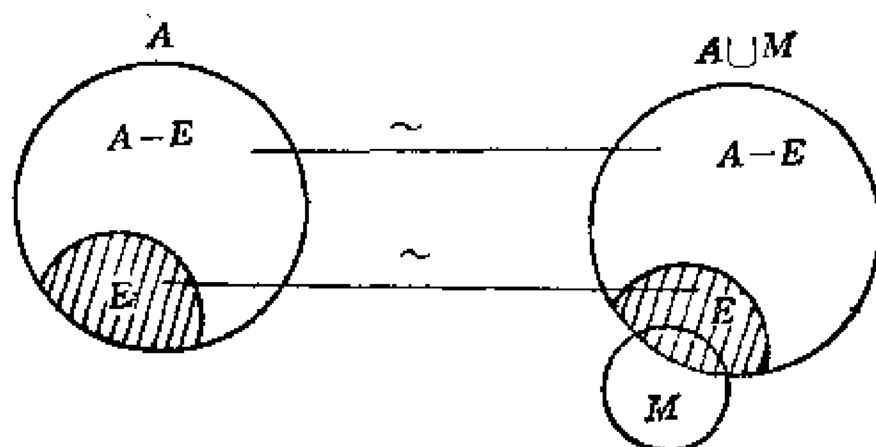


图1—3

证明　1° 若 $A\supseteq M$ 显然结论成立。否则不妨先就$A\cap M=\phi$情形证之。

因A是无限集，故由§3 定理 2 知A必有可列子集 E，令

$$A-E=D$$

于是有

$$A=D\cup E, \text{且 } A\cup M=D\cup(E\cup M)$$

因为 $D\sim D$, $E\cup M\sim E$, 又因 $D\cap E=\phi$；$D\cap(E\cup M)=\phi$ $(D\subseteq A,\ A\cap M=\phi)$。

于是由引理 1 知有

$$A\cup M=D\cup(E\cup M)\sim D\cup E=A$$

2° 若 $A\cap M\neq\phi$，令 $M^*=M-A$, 显然 M^* 是有限集或可列集，且

$$A\cap M^*=\phi,\quad A\cup M=A\cup M^*$$

于是由 1° 得

$$A\cup M=A\cup M^*\sim A$$

综上定理证毕.

定理 3 设 S 是一个不可列无限集，M是 S 的有限子集或可列子集，则

$$S-M\sim S$$

证明 显然差集 $A=S-M$ 不是有限集（否则 $S=A\cup M$ 将是至多可列集了），故 A是无限集，于是由定理 2 有

$$S=A\cup M\sim A=S-M$$

推论 2 开区间（0，1）的基数也是连续基数 c.

推论 3 凡无限集必含有一个和它自身对等的真子集.

证明 依据§3的定理 2 和上述定理知，从无限集 A中除去一个任意有限子集 M，恒有

$$A\sim A-M$$

故无限集必含有和它自身对等的真子集.

定理 4 实数集是不可列的，且它的基数是连续基数 c.

证明 由推论 2 知，只须证明$(0,1)\sim(-\infty,\infty)$. 为此只须作映射

$$f:\ (0,1)\longrightarrow(-\infty,\infty),\quad x\longmapsto f(x)=\mathrm{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$$

显然 f 是从（0，1）到（$-\infty$，∞）的双射，从而得证.

定理 5 闭区间$[a,b]$的基数是 c.

证明 作映射

$f:[0,1]\longrightarrow[a,b],\ x\longmapsto f(x)=a+(b-a)x$ 显然 f是双射，从而得证.

推论 4 任意区间 (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$均有连续基数 c.

定理 6 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是一列两两互不相交集合，且它们的基数都是 c，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 的基数也是c。

证明 于半开区间 $[0, 1)$ 中取一单调增加点列 $\{c_n\}$：

$$c_0 = 0 < c_1 < c_2 < \cdots, \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} c_n = 1$$

则

$$\{[c_{n-1}, c_n)\}_{n\in N}$$

也构成两两不相交的可列个基数皆为c的集列，且对任意$n \in N$，有

$$A_n \sim [c_{n-1}, c_n)$$

从而由引理 1 知有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} [c_{n-1}, c_n) = [0, 1)$$

推论 5 $(0, \infty), [0, \infty), (-\infty, 0), (-\infty, 0]$ 的基数皆是 c。

证明 只证$(0, \infty)$的基数是 c，其他结论是明显的。

设 $I_n = (n-1, n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$，则有

$$I_n \cap I_m = \phi \quad (n \neq m), \text{且 } \overline{\overline{I_n}} = c \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

于是由定理 6 知有

$$\overline{\overline{(0, \infty)}} = \overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n}} = c$$

上面我们比较详尽地讨论了有关实数集的基数问题。人们可能会觉得实数集合R中的点已经相当的多了，而它的基数是c，那么是否还存在着那样的集合它的基数比 c 还会大呢？下面的定理对这一问题给予了完满的回答。

定理 7 设A是任意集合，A的所有子集组成的新集合为$\mathscr{A}$，即

$$\mathscr{A}=\{E \mid E \subseteq A\}$$

则$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{\mathscr{A}}}$。

证明 由基数的大小定义知，只须证明A与$\mathscr{A}$的一个子集对等，但A不和$\mathscr{A}$对等。

1° 往证存在 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}$ 使 $A\sim\mathscr{B}$。

设 $x\in A$，则 $\{x\}\subseteq A$，从而 $\{x\}\in\mathscr{A}$，于是

$$\mathscr{B}=\{\{x\} \mid x\in A\}\subseteq\mathscr{A}$$

令 $\varphi: A\longrightarrow\mathscr{B}$，$x\longmapsto\varphi(x)=\{x\}$

显然 φ 是双射，故 $A\sim\mathscr{B}$。

2° 往证A与$\mathscr{A}$不对等．假设 $A\sim\mathscr{A}$，则存在双射

$$f: A\longrightarrow\mathscr{A},\quad a\longmapsto f(a)=M_a$$

因为 $a\in A$，$M_a\in\mathscr{A}$，而 M_a 是A的子集，故 $a\in M_a$ 或 $a\notin M_a$ 二者必居其一．所以如果我们能找到一个 $a'\in A$，$a'\longmapsto Ma'$，使 $a'\in Ma'$ 与 $a'\notin Ma'$ 二者都不成立，就得出了矛盾．

事实上，令

$$M'=\{x \mid x\in A,\ x\longmapsto f(x)=M_x,\ x\notin M_x\}$$

则 $M'\neq\phi$（因A中与 $\phi\in\mathscr{A}$ 对应的元素即在 M' 中），且

$$x\in M' \text{ 的充要条件是 } x\notin M_x \qquad (1)$$

又显然 $M'\subseteq A$，即 $M'\in\mathscr{A}$，故有

$$a'\in A,\ 使\ a'\longmapsto f(a')=M'$$

从而有

$$M'=Ma' \qquad (2)$$

于是，若 $a'\in M'$，则由式（1）有 $a'\notin Ma'$，从而由式（2）有 $a'\notin M'$ 矛盾；

若 $a'\notin M'$，则由式（2）有 $a'\notin M_{a'}$，从而由式（1）有 $a'\in M'$ 矛盾。

总之有 $a'\in M'$ 与 $a'\notin M'$ 皆不成立，这是不可能的，于是得证A与$\mathscr{A}$不对等。

综上定理得证。

习　　题

1．证明无理数组成的集合是不可列的。

2．设代数数（整系数多项式的根）的集合为A，超越数（不是代数数的实数）的集合为 B，则 $\overline{\overline{A}}=a$，$\overline{\overline{B}}=c$。

3．无限集必含有无限多个互不相交的无限真子集。

4．设 $\mathscr{F}$是$[0,1]$上所有实函数组成的集合，则$\overline{\overline{\mathscr{F}}}>c$。

5．设 $A=B\cup C$，$\overline{\overline{A}}=c$，则$B$与$C$中至少有一集的基数是 c。

6．证明$[a,b]$区间上右方连续单调函数全体的基数是 c。

第二章 点 集

在第一章里，我们介绍了一般的集合的初步理论，给出了一些重要概念和基本性质．为了满足本课程研究测度和积分的需要，我们还应当在第一章内容的基础上，再进一步研究一种特殊的集合——点集．由于点集是集合，所以第一章中所有结果对它仍都适用，但点集所具有的许多特殊的性质，对于一般的集合就未必再成立了．

§1 n 维欧氏空间

从解析几何或数学分析中，我们知道实数轴（实直线）上的每个点都唯一地对应一个实数；而平面或立体中的每个点都唯一地对应由两个实数或三个实数组成的一个有序数组。通常用R（或R^1）表示实数集合，用 R^2 和 R^3 分别表示平面和立体中的所有点组成的集合，即

$$R^2=\{x=(x_1,x_2)\ |x_1,x_2\in R\}$$

$$R^3=\{x=(x_1,x_2,x_3,)|\ x_1,x_2,x_3\in R\}$$

我们从数学分析中已经看到极限运算是分析学的最基本的运算，而极限运算又是借助“距离”来刻划的，例如在 R^1，R^2，R^3 上我们曾分别规定它们两点间的距离 ρ_1,ρ_2,ρ_3 为：

$\rho_1(x,y)=|x-y|$，其中 $x,y\in R^1$

$$\rho_2(x,y)=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2}\ ,$$

其中 $x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)\in R^2$

$$\rho_3(x,y)=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2]^{\frac{1}{2}}=$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i)^2}\ ,$$

其中 $x=(x_1,x_2,x_3)$，$y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3$

实际上，数学分析中的一系列理论结果都是以上述距离为基础推导出来的。

下面我们给出一般的 n 维欧氏空间概念：

定义 1 设 n 是自然数，由 n 个实数做成的有序数组

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的全体组成的集合，称为 n **维点集**（简称点集），记作R^n，即

$$R^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\ x_i\in R,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$，若对每个 i，$i=1,2,\cdots,n$，皆有 $x_i=y_i$，则称"x 与 y 相等"，记作 $x=y$，且称 x_i 为点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的第 i 个坐标。

仿照 $R^i(i=1,2,3)$ 中两点间距离规定，我们规定 R^n 中两点间距离 ρ 为：

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$，则

$$\rho(x,y)=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{\frac{1}{2}}=$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \tag{1}$$

R^n 配以式（1）定义的距离 ρ，称作 **n 维欧氏空间**，记作 (R^n,ρ)，通常简称作 n 维空间且简记为 R^n。

当 $n=2$ 时，从上述定义可看出此时 R^2 中两点间距离恰是 ρ_2；而当 $n=1$ 时，在 R^1 中显然有 $\rho(x,y)=|x-y|$ 恰是 ρ_1。所以过去我们所熟知的实直线 R^1，平面 R^2 和三维空间 R^3 实际上是一般 n 维欧氏空间的特殊情形，而后者则是它们的推广。

由定义 1 可看出，对于 R^n 中固定的两点 x 与 y，$\rho(x,y)$ 是一确定的实数，因此距离 ρ 是关于 x 和 y 的一个二元函数。容易验证，这样定义的距离具有下面的性质：

(i) 非负性：$\rho(x,y)\geqslant 0$，且 $\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$；

(ii) 对称性：$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(iii) 满足三角不等式：对任意 $x,y,z\in R^n$，有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

关于 n 维欧氏空间可以作下述的推广：

设 X 是任意非空集合，对任意 $p,q\in X$，定义一个二元函数 $d(p,q)$，如果 $d(p,q)$ 满足上述条件（i），（ii）及（iii），则称二元函数 $d(p,q)$ 为 X 上之一"距离函数"，且称函数值 $d(p,q)$ 为两点 p 与 q 间的距离。集合 X 配以一个距离函数 d，则称为距离空间（度量空间），记作 (X,d)，或在不致引起误解情况下简记为 X。

从距离空间定义可看出，R^n 是距离空间的一个特例，关于一般的距离空间将在第六章中有所涉及。

今后如不特加说明，问题的讨论总是在 R^n 中进行。

定义 2 设 $\{p_n\}$ 是 R^n 中点列，$p_0\in R^n$，如果对数列 $\{\rho(p_n,p_0)\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(p_n,p_0)=0$，则称点列 $\{p_n\}$ 收敛于 p_0，记为

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p_0 \text{ 或 } p_n \longrightarrow p_0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

定理 1 距离函数 $\rho(x,y)$是关于 x,y 的二元连续函数。即若 $x_n \longrightarrow x$，$y_n \longrightarrow y(n \longrightarrow \infty)$，则有

$$\rho(x_n, y_n) \longrightarrow \rho(x,y) \quad (n \longrightarrow \infty)$$

证明 欲证数列 $\{\rho(x_n,y_n)\}$收敛于 $\rho(x,y)$，由数列收敛定义，显然只须证 $|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)| \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$。

事实上，若 $x_n \longrightarrow x$，$y_n \longrightarrow y \ (n \longrightarrow \infty)$，即

$$\rho(x_n, x) \longrightarrow 0, \rho(y_n, y) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

因为距离满足三角不等式，故对每个 n，恒有

$$\begin{aligned}\rho(x_n,y_n) &\leqslant \rho(x_n,x)+\rho(x,y_n)\\ &\leqslant \rho(x_n,x)+\rho(x,y)+\rho(y,y_n)\end{aligned}$$

于是有

$$\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y) \leqslant \rho(x_n,x)+\rho(y,y_n) \qquad (1)$$

类似地，有

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &\leqslant \rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)\\ &\leqslant \rho(x,x_n)+\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y)\end{aligned}$$

从而有

$$\rho(x,y)-\rho(x_n,y_n) \leqslant \rho(x,x_n)+\rho(y_n,y) \qquad (2)$$

结合式（1）与式（2）且注意到距离的对称性，便得

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)| \leqslant \rho(x_n, x)+\rho(y_n,y) \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty)$$

定理证毕。

定义 3 R^n 中到定点 p_0 的距离小于正数 δ 的所有点 p 组成的点集，称为以 p_0 为心以 δ 为半径的 δ 邻域，记为 $N(p_0,\delta)$，即

$$N(p_0,\delta)=\{p|\ \rho(p,p_0)<\delta\}.$$

例 1 ① 在 R^1 中，设 $x_0 \in R^1$，$\delta<0$，显然邻域 $N(x_0,\delta)$

就是分别以 $x_0-\delta$、$x_0+\delta$ 为左、右端点的开区间，即

$$N(x_0,\delta)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$$

② 对 $p_0=(x_0,y_0)\in R^2$，$\delta>0$，则邻域 $N(p_0,\delta)$ 就是以 p_0 为心以 δ 为半径的圆内部的点（不含圆周上的点）组成的点集，即

$$N(p_0,\delta)=\{p\mid\rho(p,p_0)<\delta\}$$
$$=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

从上述例子可看出，邻域除取决于点 p_0 与正数 δ 外，还与空间的维数有关。比如开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 在 R^1 中是点 x_0 的一个邻域，但当把它看作 R^2 中的点集时，则为

$$E=\{(x,0)\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

此时 E 是 R^2 中分别以 $(x_0-\delta,0)$，$(x_0+\delta,0)$ 为端点的一个线段，显然它不是点 $(x_0,0)$ 的邻域。

现在我们用邻域来刻划点列的收敛问题：

$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(p_n,p_0)=0$ 的充要条件是对 p_0 的任意邻域 $N(p_0,\varepsilon)$，存在 n_ε，使当 $n\geqslant n_\varepsilon$ 时，恒有 $p_n\in N(p_0,\varepsilon)$。

必要性　设 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(p_n,p_0)=0$，于是由数列收敛定义知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 n_ε，使当 $n\geqslant n_\varepsilon$ 时，有

$$|\rho(p_n,p_0)-0|=\rho(p_n,p_0)<\varepsilon \qquad (1)$$

因为 $N(p_0,\varepsilon)=\{p\mid\rho(p,p_0)<\varepsilon\}$，从而由式（1）知，当 $n\geqslant n_\varepsilon$ 时，有 $p_n\in N(p_0,\varepsilon)$。

充分性　已知对任意 $\varepsilon>0$，存在 n_ε，使当 $n\geqslant n_\varepsilon$ 时，有 $p_n\in N(p_0,\varepsilon)$。于是由邻域 $N(p_0,\varepsilon)$ 的定义知，当 $n\geqslant n_\varepsilon$ 时有 $\rho(p_n,p_0)<\varepsilon$，从而有

$$|\rho(p_n,p_0)-0|=\rho(p_n,p_0)<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(p_n,p_0)=0$。

下面我们利用邻域来讨论 R^n 中一个点和一个点集间的关

系，先就 R^1 情况考察下述例子：

设 $E=(a,b]\cup\{c\}$ $(c>b)$，结合图 2—1

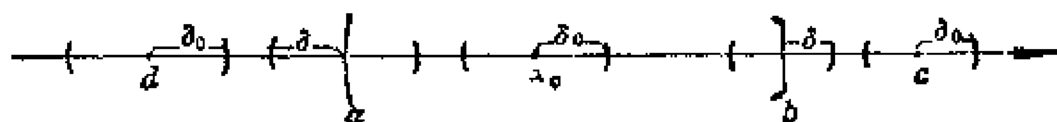


图2—1

容易看出，在 R^1 中：

1 有的点 x，能有某个邻域 $N(x,\delta_0)$ 使 $N(x,\delta_0)\subseteq E$，如(a,b)中的 x_0 点。

2 有的点 x 的任意邻域 $N(x,\delta)$ 中必总含有E中无限多个点，即对任意 $\delta>0$，$N(x,\delta)\cap E$ 总是一个无限集．如$(a,b]$中的所有点，特别是点 a 与 b 也都具有这种性质．

3 有的点 x 的任意邻域 $N(x,\delta)$ 中，总既含有E中点又含有不属于E的点，即 $N(x,\delta)\cap E\neq\phi$，且 $N(x,\delta)\cap\mathscr{C}E\neq\phi$．

如点 a、b 和 c 均有此性质．

4 有的点 $x\in E$，且能有某个邻域 $N(x,\delta_0)$，使在 $N(x,\delta_0)$中除点 $x\in E$ 外再不含有E的点，即对 $x\in E$，存在 $\delta_0>0$，使 $N(x,\delta_0)\cap E=\{x\}$，如点 c。

5 有的点 x 能有某个邻域 $N(x,\delta_0)$，使$N(x,\delta_0)\cap E=\phi$，如点 d。

从上述例子可看出，点和点集间的关系不尽相同，现在我们依据不同的情况分别地给出下述概念．

定义4 设 $p_0\in R^n$，$E\subseteq R^n$，若存在某个 p_0 的邻域 $N(p_0,\delta_0)$，使

$$N(p_0,\delta_0)\subseteq E$$

则称 p_0 是E的内点。

由内点定义可知：

① 若 p 是A的内点且 $A\subseteq B$，则 p 也是B的内点。

② p 不是A的内点的充要条件是，对 p 的任意邻域 $N(p,\delta)$，恒有 $N(p,\delta)\cap \mathscr{C}A\neq\phi$。

例 2 ① 显然$x_0=\frac{1}{3}$是$A=(0,1]\subseteq R^1$的内点，但$x_1=0$，$x_2=1$ 都不是A的内点。

② 设 $N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$，对于 $n\in N$，n 的任意邻域 $N(n,\varepsilon)=(n-\varepsilon,\ n+\varepsilon)$，显然都有 $N(n,\ \varepsilon)\cap\mathscr{C}N\neq\phi$，从而 $N(n,\varepsilon)\nsubseteq N$，故$N$中的每个点 n 都不是N的内点。

定义 5 设 $p_0\in R^n$，$E\subseteq R^n$，若 p_0 的任意邻域$N(p_0,\delta)$总含有E中无限多个点，则称 p_0 为E的**聚点**。

由聚点定义可知：

① p_0 不是 E 的聚点的充要条件是，p_0 有某个邻域 $N(p_0,\delta_0)$，使 $N(p_0,\delta_0)$ 至多含有E的有限多个点。

② 点集A的聚点未必属于 A，如 $A=(a,b]$，显然 a 是A的聚点，但 $a\notin(a,b]=A$。

③ 若 p_0 是E的内点，则 p_0 必是 E 的聚点，但其逆不真。

例 3 1° 显然数 0 是$A=\left\{1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\ \cdots\right\}$的聚点，但 $0\notin A$。

2° $N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 中任何一点都不是N的聚点。

事实上，对任一 $i\in N$，取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，则 i 的邻域 $N\left(i,\frac{1}{2}\right)$除 i 以外再不含有 N 的其他任何点，于是由聚点定义知，i 不是N的聚点。

定义 6 设 $p_0\in R^n$, $E\subseteq R^n$,若对 p_0 的任意邻域$N(p_0,\delta)$既总含有E中点，又总含有不属于E的点，即对任意$N(p_0,\delta)$，恒有

$$N(p_0,\delta)\cap E\neq\phi \text{ 且 } N(p_0,\delta)\cap\mathscr{C}E\neq\phi$$

时，则称 p_0 为E的**边界点**。

由边界点定义可知：

①E的边界点可以属于E也可以不属于E。如$A=(a,b]$，则 a 和 b 皆是A 的边界点，但 $a\notin A$, $b\in A$。特别地，若 $p\notin E$ 且 p 是E的边界点时，则 p 必是E的聚点。

事实上（反证法），假设 p 不是E的聚点，且 $p\notin E$，则由定义知，必有 p 的邻域 $N(p,\varepsilon_0)$ 使

$$N(p,\varepsilon_0)\cap E=\phi$$

这与 p 是E的边界点矛盾。

② E的内点必不是E的边界点；E的边界点也必不是E的内点。

定义 7 （1）设 $p_0\in E$, $E\subseteq R^n$,若存在p_0的某个邻域，使该邻域除 p_0 外再不含有E的点，即存在某个 $N(p_0,\delta_0)$ 使

$$N(p_0,\delta_0)\cap E=\{p_0\}$$

则称 p_0 为E的**孤立点**。

（2）设 $p_0\in R^n$, $E\subseteq R^n$,若存在p_0的某个邻域 $N(p_0,\delta_0)$，使

$$N(p_0,\delta_0)\cap E=\phi$$

则称 p_0 为E的**外点**。

由孤立点及外点定义可知：

① p_0 是E的孤立点，则 p_0 必是E的边界点，但其逆不真。

② p_0 是E的孤立点，则 p_0 既不是E的内点也不是E的

聚点；E的内点和聚点也都不是E的孤立点。

③ p_0 是E的外点的充要条件为 p_0 是 $\mathscr{C}E$ 的内点。

例 4 对例 3 中的 $A=\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$，显然$A$中点都是它的孤立点，从而也都是$A$的边界点，而 0 既是$A$的聚点同时也是$A$的边界点，但它不是$A$的孤立点。

上面给出的内点、聚点、边界点和孤立点等概念都是最基本的，是以后讨论问题的基础，必须准确牢固地掌握它们。从这些概念可看出它们之间既有联系又有区别，必须注意这些概念各自的本质与特点。比如在内点和孤立点的定义中，只要求存在"某一个"邻域满足条件即可，而聚点和边界点的定义则要求对"任意"邻域都要满足条件。

定理 2 p_0 是E的聚点的充要条件是 p_0 的任意邻域必总含有E中异于 p_0 的点，即对任意 $\delta>0$，总有

$$N(p_0,\delta)\cap(E-\{p_0\})\neq\phi.$$

证明 必要性 设 p_0 是E的聚点，则由聚点定义知，对 p_0 的任意邻域 $N(p_0,\delta)$ 必总含有E的无限多个点，从而显然任意 $N(p_0,\delta)$必总含有E中异于 p_0 的点。

充分性 已知 p_0 的任意邻域 $N(p_0,\delta)$总含有 E 中异于 p_0 的点，往证 p_0 是E的聚点。为此只须证明 p_0 的任意邻域 $N(p_0,\delta)$必总含有E的无限多个点。

事实上（反证法），假如结论不成立，即 p_0 有某个邻域 $N(p_0,\delta_0)$，使 $N(p_0,\delta_0)$ 至多含有E中有限多个点 $e_1,e_2,\cdots,e_n$（不妨设 $e_i\neq p_0$，$i=1,2,\cdots,n$），令

$$\varepsilon_0=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\rho(p_0,e_i)\}$$

于是 $\varepsilon_0>0$，对 p_0 的邻域 $N(p_0,\varepsilon_0)$，显然有

$$N(p_0, \varepsilon_0) \cap (E - \{p_0\}) = \phi$$

这和已知条件矛盾，从而充分性得证。

定理 3 p_0 是E的聚点的充要条件是E中有互异点列$\{p_n\}$收敛于 p_0。

证明 必要性 已知 p_0 是E的聚点，只需从E中选出一个互异的点列$\{p_n\}$使 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(p_n, p_0) = 0$。为此，我们采取下述作法：

1° 令 $\delta_1 = 1 > 0$，因 p_0 是E的聚点，故 $N(p_0, 1)$ 含E中无限多个点，于是可取一点 $p_1 \in N(p_0, 1) \cap E$。

再令 $\delta_2 = \frac{1}{2} > 0$，同理知$N\left(p_0, \frac{1}{2}\right)$含有$E$中无限多个点，故能取到

$$p_2 \in N\left(p_0, \frac{1}{2}\right) \cap (E - \{p_1\})$$

从而 $p_2 \neq p_1$。

一般说来，假设对 $\delta_i = \frac{1}{i} > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，已选出E中互异的点 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，使

$$p_i \in N\left(p_0, \frac{1}{i}\right) \cap (E - \{p_1, p_2, \cdots, p_{i-1}\}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

再令 $\delta_{n+1} = \frac{1}{n+1} > 0$，仍由 p_0 是E的聚点知，$N\left(p_0, \frac{1}{n+1}\right)$含有$E$中无限多个点，故

$$N\left(p_0, \frac{1}{n+1}\right) \cap (E - \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}) \neq \phi$$

从而可取到点 p_{n+1}，使

$$p_{n+1} \in N\left(p_0, \frac{1}{n+1}\right) \cap (E - \{p_1, p_2, \cdots, p_n\})$$

显然 p_{n+1} 与 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的每一个都不相同．于是由数学归纳法知，我们能够依上述方法从E中选出互异点列 $\{p_n\}$．

2° 由1°中点列 $\{p_n\}$ 的取法可知，对任意自然数 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，恒有

$$p_n \in N\left(p_0, \frac{1}{n_0}\right) \cap E, \text{ 故 } \rho(p_0, p_n) < \frac{1}{n_0}$$

于是由 n_0 的任意性及数列极限定义知

$$\rho(p_n, p_0) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

充分性　已知E中存在互异点列 $\{p_n\}$，使 $\rho(p_n, p_0) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$．于是由数列收敛定义知，对任意 $\delta > 0$，必有 n_δ 使当 $n \geqslant n_\delta$ 时，恒有

$$|\rho(p_n, p_0) - 0| = \rho(p_n, p_0) < \delta$$

从而当 $n \geqslant n_\delta$ 时，恒有 $p_n \in N(p_0, \delta)$．因 $\{p_n\}$ 是互异的，故 $N(p_0, \delta)$ 含有E的无限多个点，由 $N(p_0, \delta)$ 的任意性及聚点定义知 p_0 是E的聚点．

定理2和定理3给出了判定集合的聚点的两个充要条件．在讨论某些问题时，使用这些充要条件往往会比直接应用聚点定义更为方便，读者应该熟练掌握它们．

下面我们利用点集E的内点、聚点构造新的点集，这几种与E有关系的点集具有很重要的性质．

定义8　（1）点集E的全部内点组成的点集，称为E的内域，记为 E°．

显然E的内域 E° 必是E的子集，即 $E^\circ \subseteq E$．

（2）E的全部聚点组成的点集，称为E的导集，记为 E'．

（3）对点集 E，并集 $E \cup E'$ 称为E的闭包，记为 $\overline{E}$，即 $\overline{E} = E \cup E'$．

例5 ① 设 $A=(1,2]\cup\{3\}$，则显然有

$$A^\circ=(1,2),\quad A'=[1,2]$$

于是

$$\overline{A}=A\cup A'=([1,2]\cup\{3\})\cup[1,2]=[1,2]\cup\{3\}$$

② 对 $N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，显然有 $N^\circ=N'=\phi$（参看例3），从而$\overline{N}=N\cup N'=N$。

例6 设

$$E=\{(x,y)|\,x^2+y^2<1\}=\{p\,|\rho(p,o)<1\}\subseteq R^2$$

其中 $o=(0,0)$是平面的原点，则

(1) $E^\circ=\{p\,|\,\rho(p,o)<1\}=E$（图2—2(a)），

(2) $E'=\{p|\,\rho(p,o)\leqslant1\}\supseteq E$（图2—2(b)）；

(3) $\overline{E}=E\cup E'=\{p\,|\rho(p,o)\leqslant1\}=E'$（图2—2(b)）。

证明 (1) $E^\circ=E$。因 $E^\circ\subseteq E$，故只须证 $E^\circ\supseteq E$，为此只须证E的点皆是E的内点.

对任一 $p\in E$，则有 $\rho(p,o)<1$，今取 $\delta=1-\rho(p,o)$，则 $\delta>0$。

下面证 $N(p,\delta)\subseteq E$。

设 $q\in N(p,\delta)$，则 $\rho(p,q)<\delta$，从而有

$$\rho(o,q)\leqslant\rho(o,p)+\rho(p,q)<\rho(o,p)+\delta=1$$

故 $q\in E$，所以 $N(p,\delta)\subseteq E$，故 p 是E的内点，得证 $E^\circ\supseteq E$，于是证得 $E^\circ=E$。

(2) $E'=\{p\,|\rho(p,o)\leqslant1\}$。

左$\supseteq$右 设 $q\in\{p\,|\rho(p,o)\leqslant1\}$，若 $\rho(q,o)<1$显然$q\in E'$，若 $\rho(q,o)=1$，只须证对任意 $N(q,\delta)$，必有 $t\neq q$ 使 $t\in N(q,\delta)\cap E$。设

$$\rho(q,o)=1,\quad q=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

不妨设 $x_1>0$，$0<\delta<4x_1<1$。取

$$t=\left(x_1,x_2,\cdots,x_j-\frac{\delta}{2},\ \cdots,\ x_n\right)$$

于是 $t\neq q$，且有

$$\rho(t,o)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+\left(x_j-\frac{\delta}{2}\right)^2+\cdots+x_n^2}$$

$$<\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_j^2+\cdots+x_n^2}=\rho(q,o)=1$$

从而 $t\in E$。另外，

$$\rho(q,t)=\sqrt{\left(x_j-\left(x_j-\frac{\delta}{2}\right)\right)^2}=\frac{\delta}{2}<\delta$$

故 $t\in N(q,\delta)$，所以 $q\in E'$. 证得左$\supseteq$右成立.

左$\subseteq$右　只须证明若 $q\notin\{p\mid\rho(p,o)\leqslant 1\}$，则必有 $q\notin E'$，即存在 q 的某个邻域 $N(q,\delta)$，使

$$N(q,\delta)\cap E=\phi \tag{1}$$

设 $q\notin\{p\mid\rho(p,o)\leqslant 1\}$，则 $\rho(q,o)>1$，取 $\delta=\rho(q,o)-1>0$，$N(q,\delta)$ 即满足式(1)。

事实上，若 $t\in N(q,\delta)$，则

$$\rho(q,t)<\delta=\rho(q,o)-1$$

由于

$$\rho(o,t)+\rho(t,q)\geqslant\rho(o,q)$$

从而

$$\rho(o,t)\geqslant\rho(o,q)-\rho(t,q)>\rho(o,q)-\delta$$

$$=\rho(o,q)-(\rho(q,0)-1)=1$$

故 $t\notin E$，所以 $N(q,\delta)$ 与E没有公共元素，即式(1)成立. 于是 q 不是E的聚点，故 $q\notin E'$，得证左$\subseteq$右.

综上得证 $E'=\{p\mid\rho(p,o)\leqslant 1\}$.

(3)　显然$\overline{E}=E\cup E'=\{p\mid\rho(p,o)\leqslant 1\}$.

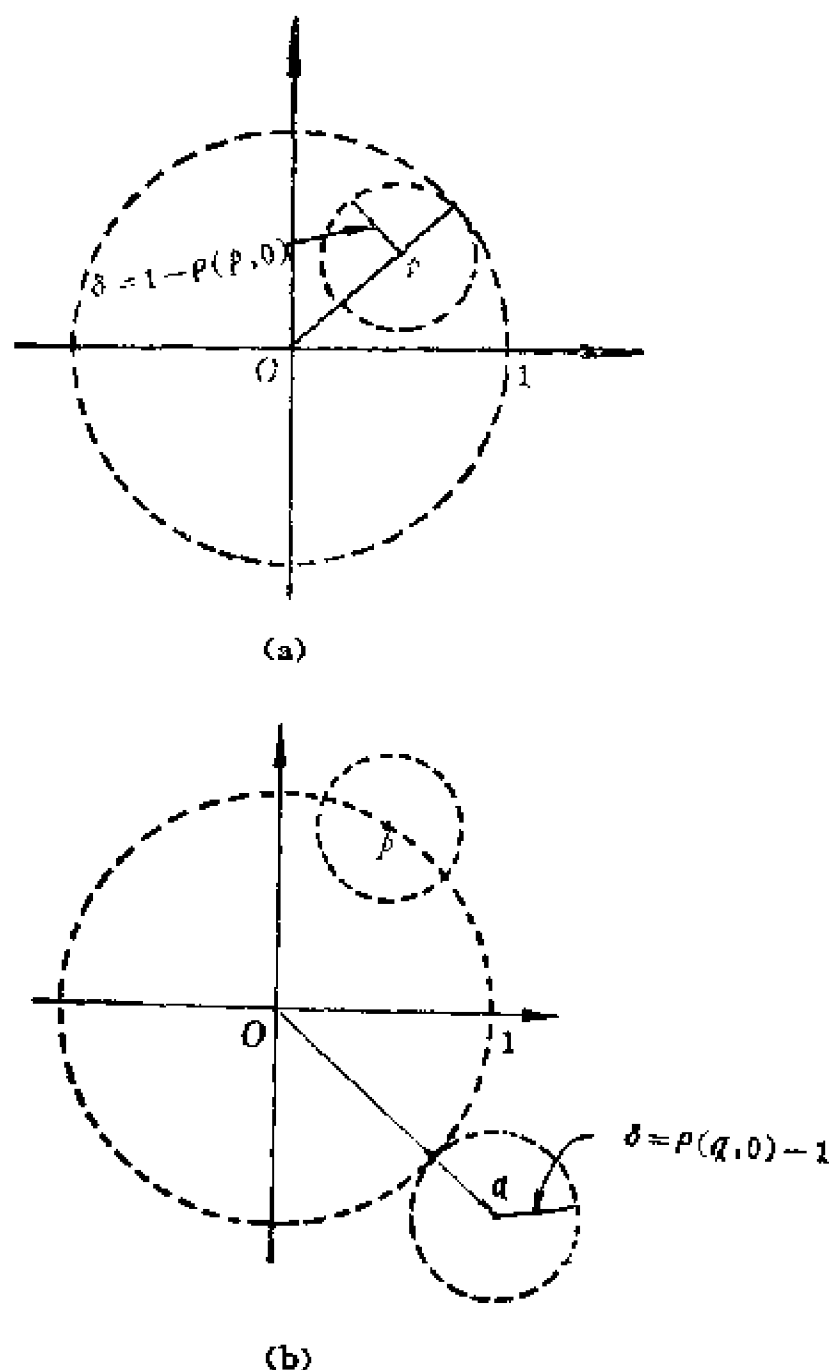


图 2—2

下面我们仍借助邻域再给出一个重要概念.

设 $A\subseteq R^n$,如果对任意 $p\in R^n$以及 p的任意邻域$N(p,\delta)$,恒有

$$A\cap N(p,\delta)\neq\phi$$

则称A在 R^n 中稠密,或称A为 R^n 的稠密子集.

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$, 如果 x 的每个坐标 x_i 都是有理数,则称 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 R^n 的有理点.

令 Q^n 表示 R^n 中所有有理点组成的点集，即

$Q^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|x_i$ 是有理数，$i=1,2,\cdots,n\}$由第一章§3的定理 7 可知，Q^n 是可列集，且容易验证它是 R^n 的稠密子集．正象我们所知道的，有理数集 Q 可列且在实直线R^1中稠密这一事实有着重要作用一样，R^n 的有理子集 Q^n 可列且在 R^n 中稠密这一结果也具有重要意义，读者应加注意．

通过第一章§2的讨论已知全体实数集合的基数是 c。实际上，我们还能够证明整个平面上或整个 n 维空间 R^n 中的点所作成的点集的基数也都是 c（参看主要参考文献〔1〕）．

定理 4 设 $A\subseteq B$,则 $A^\circ\subseteq B^\circ, A'\subseteq B'$, $\overline{A}\in\overline{B}$．

证明 1° 往证 $A^\circ\subseteq B^\circ$。这是明显的，事实上，若 $p\in A^\circ$,即 p 是 A 之内点，故有某个 $N(p,\delta_0)$使$N(p,\delta_0)\subseteq A$。但$A\subseteq B$,于是 $N(p,\delta_0)\subseteq B$,即 p 是 B 之内点，从而 $p\in B^\circ$。于是得证$A^\circ\subseteq B^\circ$．

2° 往证 $A'\subseteq B'$．由导集及聚点定义知,只须证明若 $p\in A'$,则对 p 之任意邻域 $N(p,\delta)$必都含有 B 的无限多个点（或用定理 2 及定理 3）．

事实上，若 p 是 A之聚点，则对任意邻域 $N(p,\delta)$ 必都含有A的无限多个点，因 $A\subseteq B$,故 $N(p,\delta)$ 必都含有B的无限多个点，从而 p 是 B 之聚点，故 $p\in B'$。得证 $A'\subseteq B'$．

3° 往证$\overline{A}\subseteq\overline{B}$。由条件知 $A\subseteq B$,又由2°知 $A'\subseteq B'$，于是有

$$\overline{A}=A\cup A'\subseteq B\cup B'=\overline{B}$$

定理 4 给出的性质分别称为内域、导集和闭包的单调性，

定理 5 $A'\cup B'=(A\cup B)'$．

证明 左$\subseteq$右 因 $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$，于是由定理 4 知，$A'\subseteq(A\cup B)'$，$B'\subseteq(A\cup B)'$,从而有

$$A'\cup B'\subseteq(A\cup B)'$$

左$\supseteq$右　只须证若 $p\in(A\cup B)'$ 则 $p\in A'\cup B'$. 欲证 $p\in A'\cup B'$, 只须证 $p\in A'$ 或 $p\in B'$. 因点 p 对点集 A' 来说, $p\in A'$ 和 $p\notin A'$ 二者必居其一且仅居其一. 因此只须证明在 $p\in A'$ 和 $p\notin A'$ 两种情况下, 都有 $p\in A'\cup B'$ 就可以了.

设 $p\in(A\cup B)'$,若 $p\in A'$, 显然有 $p\in A'\cup B'$, 从而左$\supseteq$右成立.

若 $p\notin A'$,则只须证明 $p\in B'$ 即可. 因 p 不是 A 之聚点, 从而由定理3 知 A 中不存在互异点列收敛于 p. 但 $p\in(A\cup B)'$, 故仍由定理3 知, $A\cup B$ 中必有互异点列 $\{q_n\}$ 收敛于 p, 但 $\{q_n\}$ 不能有无限多项属于 A, 故 $\{q_n\}$ 中必有无限多项属于 B, 即 B 中有互异点列收敛于 p, 于是由定理3 知 $p\in B'$. 总之必有 $p\in A'\cup B'$, 得证左$\supseteq$右.

综上证得 $A'\cup B'=(A\cup B)'$.

习　　题

1. 求下列集合 E 的导集 E'、内域 E° 及闭包 $\overline{E}$:

① E 是闭区间$[0,1]$上的全部有理数.

② E 是 R^1 中的全部无理数.

③ $E\subseteq R^2$, E 是函数.

$$y=f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

的图形上的点所组成的点集.

④ $E\subseteq R^2$, $E=\left\{\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{n}\right)\middle|\ m,n \text{ 为任意自然数}\right\}$.

⑤ $E\subseteq R^3$, $E=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2<1,\ z=0\}$.

2. 设 $A,B\subseteq R_n$, $(A\cap B)'=A'\cap B'$ 是否恒成立?

3. 设 A, $B\subseteq R^n$, 试证 $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$.

4. 设 $A,B\subseteq R^n$, $(A\cup B)^\circ=A^\circ\cup B^\circ$ 是否恒成立?

5. 设 $A,B\subseteq R^n$, 若 $A^\circ\subseteq B^\circ$, 是否必有 $A'\subseteq B'$?

6. 试作一集合 A, 它的所有点都是孤立点, 而 A' 非空.

7. 在 R^1 中给出两个区间 A,B, 使得 $A\cap\overline{B}$ 不被$\overline{A\cap B}$包含.

8. 在 R^1 中给出两个集合 A,B, 使得 $\overline{A}\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}$ 都不相同.

§2 几种特殊的点集

本节将研究几种特殊的点集, 这里给出的概念和性质不仅在点集理论中是最基本的, 也是本门课程中讨论测度和积分理论的基础.

定义 1 若点集E中的每一点都是E的内点, 即 $E=E^\circ$, 则称E为**开集**.

例 1 R^1 中的任意开区间 (a,b) 都是开集.

事实上, 对任意 $x\in(a,b)$, 有 $a<x<b$, 于是取 $\varepsilon_x=\min\{x-a,\ b-x\}$, 则有

$$N(x,\varepsilon_x)=(x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x)\subseteq(a,b)$$

故 x 是(a,b)的内点. 由 x 的任意性得证(a,b)是开集.

值得注意的是, 在 R^2 中看点集 $A=(a,b)$, 则

$$A=\{(x,0)\mid a<x<b\}$$

就不再是 R^2 中的开集.

例 2 整个空间 R^n 及空集ϕ都是开集.

事实上, R^n 包含它的每一点的邻域, 故 R^n 中的每一点都是它的内点, 所以是开集; 而空集ϕ不含任何点, 因此ϕ也就不含有不是内点的点, 故满足开集定义.

例 3　$A=(a,b]$，$B=(a,b)\cup\{b+1\}$都不是 R^1 中开集。事实上，$b\notin A^\circ$，$b+1\notin B^\circ$。

例 4　R^n 中点p的任意邻域 $N(p,\delta)$都是开集。

我们在§1的例 6 中已经讨论过类似问题，但邻域是开集这一结果十分重要，所以我们在本例中就一般的情况作进一步的讨论。

由开集定义可知，欲证点 p 的邻域$N(p,\delta)$是开集，只须证明对任意 $q\in N(p,\delta)$，必有 q 的某个邻域 $N(q,\varepsilon)$使 $N(q,\varepsilon)\subseteq N(p,\delta)$。

事实上，设 $p\in R^n$，对 p 的任意邻域

$$N(p,\delta)=\{t\,|\rho(p,t)<\delta\}$$

若 $q\in N(p,\delta)$，则 $\rho(p,q)<\delta$，从而 $\varepsilon=\delta-\rho(p,q)>0$，

设 $t\in N(q,\varepsilon)$，则

$$\rho(q,t)<\varepsilon=\delta-\rho(p,q)$$

从而有

$$\rho(p,t)\leqslant\rho(p,q)+\rho(q,t)<\delta$$

即 $t\in N(p,\delta)$，故 $N(q,\varepsilon)\subseteq N(p,\delta)$，从而 q 是 $N(p,\delta)$的内点。由 q 的任意性知 $N(p,\delta)$是开集。

定义 2　若E的所有聚点都属于E，即 $E\supseteq E'$，则称E为**闭集**。

由闭集定义易知：E是闭集的充要条件是 $E=\overline{E}$。

例 5　在 R^1 中，闭区间$[1,2]$和单点集 $\{0\}$ 的并集$A=[1,2]\cup\{0\}$是闭集。

事实上，$A'=[1,2]\subseteq A$，满足闭集定义，可见闭集中可以含有孤立点。

结合§1例 6 可知，R^2 中点集：

$$\{(x,y)\,|x^2+y^2\leqslant 1\}=\{p|\,\rho(p,o)\leqslant 1\}$$

是闭集.

例 6　① 任意有限集E是闭集;

② 空集ϕ及整个空间 R^n 是闭集.

事实上, 对有限集E, 显然有 $E'=\phi\subseteq E$. 又因$\phi'=\phi$, 故空集ϕ是闭集; 显然 R^n 的每个聚点都属于 R^n, 即$(R^n)'\subseteq R^n$, 故 R^n 是闭集.

例 7　R^1 中半开区间$(0,1]$既不是开集也不是闭集.

事实上, $1\in(0,1]$但 $1\notin(0,1]^\circ$, 故$(0,1]$ 不是开集; $0\in(0,1]'$ 但 $0\notin(0,1]$, 故$(0,1)$不是闭集.

定理 1　设E为任意点集, 则 (1) E°恒为开集. (2) E'和$\overline{E}$恒为闭集.

证明　(1) 只须证$(E^\circ)^\circ=E^\circ$.

左$\subseteq$右　这是显然的.

左$\supseteq$右　若 $p\in E^\circ$, 则 p 是E的内点, 从而存在$N(p,\delta)$使 $N(p,\delta)\subseteq E$. 又由例 4 知 $N(p,\delta)$ 是开集, 于是由开集定义及§1定理 4, 便有

$$N(p,\delta)=(N(p,\delta))^\circ\subseteq E^\circ$$

从而 p 是E°的内点, 即 $p\in(E^\circ)^\circ$.

综上证得 E° 是开集.

(2) 欲证 E' 是闭集, 只须证明 $(E')'\subseteq E'$. 为此, 设$p\in(E')'$, 只须证得 p 的任意邻域 $N(p,\delta)$ 都含有E的无限多个点即可.

设 $p\in(E')'$, 则 p 是 E' 的聚点, 于是在 p 的任意邻域$N(p,\delta)$内都必能取到 E' 的一个点 z, 即

$$z\in N(p,\delta)\cap E'\subseteq N(p,\delta) \tag{1}$$

因为 $N(p,\delta)$ 是开集, 而 $z\in N(p,\delta)$, 从而 z 有某个邻域$N(z,\varepsilon_0)$, 使

$$z\in N(z,\varepsilon_0)\subseteq N(p,\delta) \tag{2}$$

又由式（1）知 $z\in E'$，故 $N(z,\varepsilon_0)$含E的无限多个点，从而由式（2）知 $N(p,\delta)$含E的无限多个点，即 $p\in E'$。得证$(E')'\subseteq E'$，故 E' 是闭集。

欲证$\overline{E}$是闭集，只须证$\overline{E}'\subseteq\overline{E}$。

事实上，因$\overline{E}=E\cup E'$，于是由§1定理5有

$$\overline{E}'=(E\cup E')'=E'\cup(E')' \tag{3}$$

又由前面证明知 E' 是闭集，即 $E'\supseteq(E')'$，故由式（3）得

$$\overline{E}'=E'\cup(E')'=E'\subseteq\overline{E}$$

从而得证$\overline{E}$是闭集。

定理 2

（1）若F是闭集，则F的补集 $\mathscr{C}F$ 是开集；

（2）若G是开集，则G的补集 $\mathscr{C}G$ 是闭集.

证明 （1）若 $\mathscr{C}F=\phi$ 结论成立。若$\mathscr{C}F\neq\phi$，只须证$\mathscr{C}F$的点皆是内点。

事实上，若 $p\in\mathscr{C}F$，则 $p\notin F$，又因 F 是闭集，从而 $p\notin F'$，所以 p 即非F的点又非 F 的聚点，因此由聚点定义知，必有 p 的某个邻域 $N(p,\delta_0)$使 $N(p,\delta_0)\cap F=\phi$（否则，如对任意邻域 $N(p,\delta)$，都有 $N(p,\delta)\cap F\neq\phi$，且 $p\notin F$，则 $N(p,\delta)$必总含F中异于 p 的点，于是由§1定理2知 $p\in F'$，矛盾），从而 $N(p,\delta_0)\subseteq\mathscr{C}F$，即 p 是 $\mathscr{C}F$ 的内点，由P的任意性得证 $\mathscr{C}F$ 是开集。

（2）欲证 $\mathscr{C}G$是闭集，只须证 $(\mathscr{C}G)'\subseteq\mathscr{C}G$，为此只须证若 $p\notin\mathscr{C}G$，则 $p\notin(\mathscr{C}G)'$。

事实上，设 $p\notin\mathscr{C}G$，则 $p\in G$，因G是开集，故 p 是 G 之内点，从而存在某个 $N(p,\delta_0)$使 $N(p,\delta_0)\subseteq G$，于是 $N(p,\delta_0)\cap\mathscr{C}G=\phi$。这证明$N(p,\delta_0)$不含 $\mathscr{C}G$ 的点，故 p 不是$\mathscr{C}G$

的聚点从而 $p \notin (\mathscr{C}G)'$。得证 $(\mathscr{C}G)' \subseteq \mathscr{C}G$，所以 $\mathscr{C}G$ 是闭集。

定理 3 （1）任意多个开集的并集仍是开集。

（2）有限多个开集的交集仍是开集。

证明 （1）设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是任意开集族，往证 $G=\bigcup_{\alpha\in D} G_\alpha$ 是开集。

设 $p\in G=\bigcup_{\alpha\in D} G_\alpha$，由并集定义应有 $\alpha_0\in D$，使 $p\in G_{\alpha_0}$，因 C_{α_0} 是开集，故必存在某个 $N(p,\delta_0)$ 使

$$p\in N(p,\delta_0)\subseteq G_{\alpha_0}\subseteq \bigcup_{\alpha\in D} G_\alpha=G$$

从而 p 是 G 的内点，即 $G=\bigcup_{\alpha\in D} G_\alpha$ 是开集。

（2）设 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 皆是开集，往证 $G=\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ 是开集。

设 $p\in G=\bigcap_{i=1}^{n} G_i$，由交集定义知，对每个 i 都应有 $p\in G_i(i=1,2,\cdots,n)$，因每个 G_i 皆是开集，故对每个 i 应有 $N(p,\delta_i)$ 使

$$N(p,\delta_i)\subseteq G_i\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

取 $\delta_0=\min\{\delta_1\delta_2,\cdots,\delta_n\}$，显然对每个 i 皆有

$$N(p,\delta_0)\subseteq G_i\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

从而有 $N(p,\delta_0)\subseteq \bigcap_{i=1}^{n} G_i=G$，即 p 是 G 之内点，于是得证 $G=$

$\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$是开集。

注意，无限多个开集的交集未必是开集。参看第一章§1例11：$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) (n = 1, 2, \cdots)$，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

而单点集$\{0\}$，不是开集，事实上，点 0 不是$\{0\}$的内点，故$\{0\}^\circ = \phi \neq \{0\}$。

定理 4 （1）任意多个闭集的交集仍是闭集。

（2）有限多个闭集的并集仍是闭集。

证明 （1）设$\{F_\alpha\}_{\alpha\in D}$是任意闭集族，往证$F = \bigcap\limits_{\alpha\in D} F_\alpha$是闭集。

为此，当然可从定义出发证$F' \subseteq F$。但我们也可以应用第一章§1 定理 7（笛摩根公式）把闭集的交运算转化为开集的并运算，证明$\mathscr{C}F$是开集（用定理 3），再由定理 2 即得结论。

因对任意$\alpha \in D$，F_α是闭集，故CF_α是开集，但

$$\mathscr{C}F = \mathscr{C}\left(\bigcap_{\alpha\in D} F_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in D} \mathscr{C}F_\alpha$$

于是由定理3知$\mathscr{C}F$是开集，因$F = \mathscr{C}(\mathscr{C}F)$从而由定理2知$F = \bigcap\limits_{\alpha\in D} F_\alpha$是闭集。

（2）设$F_1, F_2, \cdots, F_n$皆是闭集，往证$F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$是闭集。

与（1）同样的方法，有

$$\mathscr{C}F=\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}\mathscr{C}F_i$$

因每个 $\mathscr{C}F_i$ 是开集，故由定理3知 $\mathscr{C}F=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathscr{C}F_i$ 是开集，从而 $F=\mathscr{C}(\mathscr{C}F)$ 是闭集，所以 $F=\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i$ 是闭集。

注意，无限多个闭集的并集未必是闭集。例如，R^1 中的闭区间是闭集，故 $F_n=\left[\frac{1}{n},1\right](n=1,2,\cdots)$ 是一列闭集，显然有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n=(0,1]$，但 $(0,1]$ 不是闭集。

下面我们再讨论一种比闭集条件更强的特殊点集——完备集。

定义3 若 $E\subseteq E'$，则称 E 为**自密集**。

由自密集定义可知：E 是自密集的充要条件为 E 不含孤立点。

事实上，设 E 是自密集，则 $E\subseteq E'$，即 E 的点都是它的聚点，而孤立点必不是聚点，故 E 必不含有孤立点。

反之，对任意非空点集，它所含的点只能有两种，即孤立点和聚点。若 E 不含孤立点，则 E 中点皆是聚点，从而有 $E\subseteq E'$，即 E 是自密集。

例8 设 A 是由闭区间 $[0,1]$ 中全部有理数组成的点集，显然 $A'=[0,1]$，而 $A\subseteq[0,1]=A'$，故 A 是自密集。

定义4 若 $E=E'$，则称 E 为**完备集**。

由完备集定义可知：E 是完备集的充要条件为 E 即是闭集又是自密集（即 E 是不含孤立点的闭集）。

例9 整个空间 R^n 和空集 ϕ 都是完备集（参看例6）.

例10 例5中给出的点集 $A=[1,2]\cup\{0\}$ 是闭集但不是完备集，因0是A的孤立点。但 R^1 中的任意闭区间 $[a,b]$都是完备集，因 $[a,b]=[a,b]'$。

表面看来，完备集中所有的点皆是聚点，又是一个闭集，似乎完备集应该充满空间的一小块，就象区间充满实直线上的一小段那样，事实并非如此。下面我们给出一个著名的完备集的例子来说明这个问题。

例11 （康托集）

（一）康托集

将闭区间 $[0,1]$用分点$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$分为三等份，删去中间的开区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$；再将留下来的闭区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$及$\left[\frac{2}{3},1\right]$各自等分为三段，并各删去其中间部分$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$及$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$（图2—3）；再将余下的四个闭区间各等分为三段而各删去其中间部分，依此类推，把上述作法无限次进行下去。很明显，$[0,1]$ 中有些点是永远删不掉的，如$\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ 等被删去的开区间的端点就是这样的点、因被删去的是可列个互不相交的开区间，设为$\{I_n\}$，且令$G_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，则把由$[0,1]$中不被删掉的点做成的点集

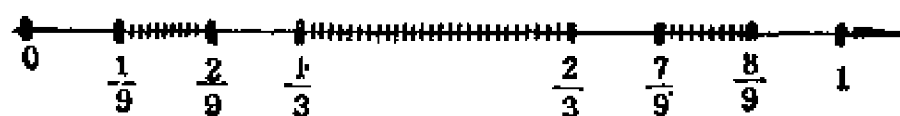


图2—3

$$F=[0,1]-G_0 \tag{1}$$

称为康托集，且称 G_0 为康托开集。

（二）康托集F是完备集

1° F 是闭集。

事实上，式（1）中的 G_0 是可列个开区间的并集，故 G_0 是开集，从而 $\mathscr{C}G_0$ 是闭集，且有

$$F=[0,1]-G_0=[0,1]\cap\mathscr{C}G_0$$

所以F是闭集。

2° F 是自密集。

只须证明F的点皆其聚点，设 $x\in F$，则只须证 x 的任意邻域 $N(x,\varepsilon)$总含有F中异于 x 的点。

首先注意下述明显的事实：

① 从$[0,1]$中第一次删去 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 后余下的两个闭区间长度皆为$\frac{1}{3}$；第二次删去$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$，$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ 后余下的四个闭区间长度皆为$\frac{1}{3^2}$。一般说来，第 n 次删去开区间后余下的每个闭区间长度皆为$\frac{1}{3^n}$.

② 无论删去开区间的手续进行多少次（任意有限次），F 的点必总属于某个余下的闭区间。

③ 从$[0,1]$ 中删去开区间后余下的闭区间的端点恒属于F。

现证F是自密集。

事实上，对任意 $\varepsilon>0$，由①知只要删去的次数n_0充分大，则可使删去 n_0 次后余下的闭区间长度 $\frac{1}{3^{n_0}}<\varepsilon$；因 $x\in F$ 故由②知x必属于删去手续进行 n_0 次后余下的某个闭区间$[\alpha,\beta]$，于是有

$$[\alpha,\beta]\subseteq(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$$

且 $\alpha,\beta\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=N(x,\varepsilon)$ （图 2 — 4 ）



图2—4

又由③知 $\alpha,\beta\in F$，所以即或 x 与$[\alpha,\beta]$的两端点α,β 之一相同，也必异于另一端点，从而得证 x 的任意邻域 $N(x,\varepsilon)$ 必总含有 F 中异于 x 的点，故 $x\in F'$，所以 F 是自密集. 结合1°及2°知 F 是完备集.

由康托集 F 的构造及上述证明不难看出，F 不包含任何区间，从而 F 不能充满实直线上任何一小段，但它却是一个完备集. 此外，由于 F 是从 $[0,1]$ 中删去可列个开区间而得到的，因此又可能产生误解，以为 F 中的点要比 $[0,1]$ 中的点少得多，事实也并非如此. 对于这一问题，我们有下述结果：

定理 5　康托集 F 的基数是 c.

我们省略这个定理的证明. 这一结果告诉我们，不能包含任何区间的康托集F，按着对等的观点，它的点居然能与整个空间 R^1 的点一般多！这是引入基数概念后出现的又一奇迹.

康托集在许多问题的讨论中常起着重要作用，因为它有一些较好的性质.

本节给出的概念和性质，都是最基本和重要的，特别是有关开、闭集的性质（包括它们的运算性质）尤为重要，必须准确牢固地掌握它们.

习　　题

1. 证明点集E为闭集的充要条件是 $\overline{E}=E$。

2. 点集E为闭集的充要条件是E中任一收敛点列$\{p_n\}$必收敛于E中一点 p。

3. 闭集关于开集的差集仍是开集；开集关于闭集的差集仍是闭集。

4. 说明§1习题 1 中诸点集E是否是开集、闭集、完备集或自密集。

5. 两个完备集的交集是否恒为完备集？有限个完备集的并集是否恒为完备集？可列个完备集的并集呢？

6. 设A为R^n中的开集，则对任意集$B\subseteq R^n$，皆有$A\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$。

§3　覆盖定理与点集间距离

在数学分析中，我们知道，闭区间上的连续函数必是一致连续的，且能取到最大值和最小值；另外，收敛点列的极限必唯一，所以能有这些重要性质，是由于实直线 R^1 具有所谓的“紧致性”与“隔离性”。本节主要的目的是把 R^1 的上述性质推广到 R^n 上来，并给出一些著名的定理。这些结果将帮助我们更深入地掌握 R^n 空间的特性，并为建立新的积分理论奠定有力的基础。

定义 1　设 $E\subseteq R^n$，若存在常数 $k>0$，使对任意 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in E$，$x$ 的每个坐标 x_i 的绝对值都不大于 k，即 $|x_i|\leqslant k\ (i=1,2,\cdots,n)$，则称 E 为**有界集**。

由上述定义不难推得：E有界的充要条件是存在常数$L>0$，使对任意 $x\in E$，有 $\rho(x,o)\leqslant L$。其中 o 称为 R^n 的原点，它的 n 个坐标全是零。

必要性　已知存在 $k>0$，使对任意$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E$有$|x_i|\leqslant k$ $(i=1,2,\cdots,n)$，今取 $L=\sqrt{n}k$，则 $L>0$，

$$\rho(x,o)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\leqslant\sqrt{nk^2}=\sqrt{n}k=L,$$

充分性　已知存在 $L>o$，使对任意 $x\in E$，有

$$\rho(x,o)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\leqslant L$$

令 $k=L$，则显然有$|x_i|^2\leqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant L^2$，即$|x_i|\leqslant L=k$ $(i=1,2,\cdots,n)$。

例 1　$E_2=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$是有界集，显然取 $L=1$ 即可。

下面我们将把数学分析中的康托闭区间套定理以及 R^2 中的闭矩形套定理等，作为读者已经熟悉的结果直接拿来应用。

定理 1　（波尔察诺——维尔斯特拉斯*定理）设 $E\subseteq R^n$ 是有界无限点集，则E至少有一个聚点 p（p 可以不属于E）。

为简便计，仅就 $n=2$ 的情形证之．基本证明思路是：首先由E是有界无限集条件，做出一列闭矩形，使其满足闭矩形套定理，从而得到一公共点，然后证此公共点即为E之聚点。

证明　1°　因E有界，故由有界集定义知，存在常数 $k>0$，使对任意 $(x,y)\in E$ 满足 $|x|\leqslant k$，$|y|\leqslant k$．于是E被包含在边长为 $2k$ 的以原点$o=(0,0)$为中心的闭正方形 A_0 内，即

$$E\subseteq A_0=\{(x,y)|\quad |x|\leqslant k,\ |y|\leqslant k\}$$

x 轴与 y 轴刚好把 A_0 分为四个闭正方形，则它们中必至少有一个闭正方形含有E中无限多个点（事实上，若四个闭正方形中都至多含有E的有限个点，则E成为有限集了，矛盾），就令这个闭正方形为 A_1，则 A_1 边长为 k 且含有E中无限多

* Bolano—Weierstrass.

个点；再用分别平行 x 轴，y 轴的两条直线将 A_1 均分为四个闭正方形．同理可知，又能取到其中一个闭正方形 A_2，使得 A_2 中含有E的无限多个点，且显然 $A_2\subseteq A_1$，而 A_2 的边长为$\frac{1}{2}k$（图2—5）．

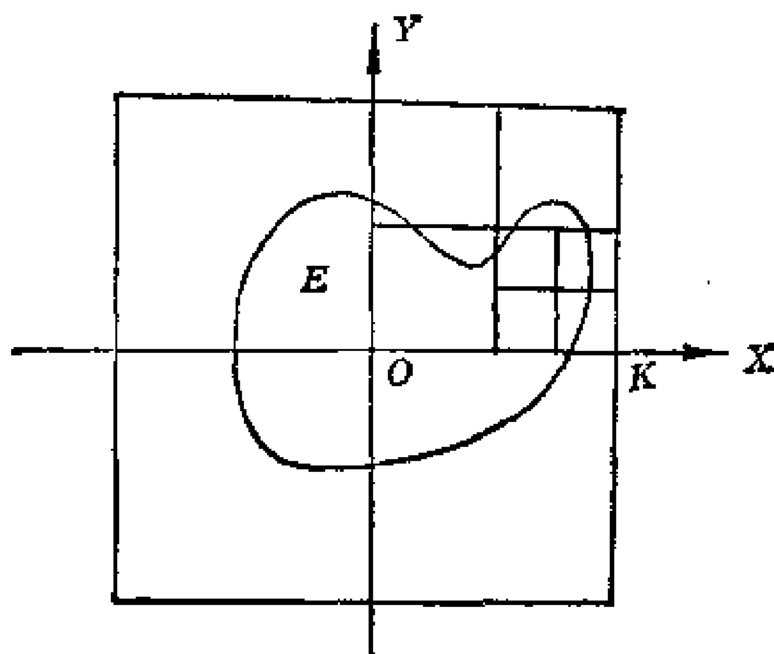


图2—5

一般地，设已选取到 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，使 $A_i\cap E$ 皆为无限集，$(i=1,2,\ \cdots,\ n)$；$A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n$，且 A_i 的边长为$\frac{1}{2^{i-1}}k$．

再用分别平行于 x 轴与 y 轴的两条直线，把 A_n 均分为四个小闭正方形，因 $A_n\cap E$ 是无限集，显然在这四个小闭正方形中必至少可取到一个含有E的无限多个点（否则E将成为有限集，矛盾），记作 A_{n+1}，从而 $A_{n+1}\cap E$ 是无限集．且 $A_{n+1}\subseteq A_n$，而 A_{n+1} 的边长为 $\frac{1}{2^n}k$．

于是由数学归纳法，我们得到一列闭正方形$\{A_n\}$，使得

$A_n\cap E$ 皆为无限集，$n=1,2,\cdots$

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \cdots$$

A_n 边长为 $2^{-n+1}k$，$n=1,2,\cdots$。

显然有$\lim_{n\to\infty} 2^{-n+1}=0$. 从而$\{A_n\}$满足闭矩形套定理条件，故有一点 $p\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$。

2° 设 $N(p,\delta)$是 p 的任一邻域，因 $\lim_{n\to\infty} 2^{-n+1}k=0$，故可取到充分大的 n_0，使对常数 $\frac{\delta}{\sqrt{2}}>0$，有

$$2^{-n_0+1}k<\frac{\delta}{\sqrt{2}},\text{即}\sqrt{2}\cdot 2^{-n_0+1}k<\delta$$

而 A_{n_0} 的对角线长恰为$\sqrt{2}\cdot 2^{-n_0+1}k$，因此 $A_{n_0}\subseteq N(p,\delta)$。因 A_{n_0} 含E的无限多个点，故 $N(p,\delta)$必含E的无限多个点，由 $N(p,\delta)$的任意性知 p 是E的聚点，定理得证。

注意，定理1中的点集E的“有界”与“无限”两条件是缺一不可的，作为练习，读者可自己分别举出缺少其中一个条件定理不复成立的反例。

推论1 设$\{p_n\}$是 R^n 中任一有界点列（即有 $L>0$，使对$\{p_n\}$的每一项 p_i，皆有 $\rho(p_i,o)\leqslant L$），则$\{p_n\}$必有收敛子列。

证明 我们只须在$\{p_n\}$中选出一子列$\{p_{n_k}\}$使其收敛于 R^n 中一点。

1° 若点列$\{p_n\}$只是由有限个不同的点排列而成的，显然在这有限个点中必至少有一个点 p_0 要在$\{p_n\}$中重复出现无限多次，很明显，当把 p_0 在 $\{p_n\}$ 中的位置编上新下标，就是$\{p_n\}$的一个子列$\{p_{n_k}\}$（$p_{n_k}=p_0$，$k=1,2,\cdots$），显然它收敛于点 p_0。

2° 若$\{p_n\}$是由无限多个互异的点排列成的，则由$\{p_n\}$各项组成的点集A是无限集且是有界的（由$\{p_n\}$有界性知）。于

是由定理1知A必至少有一个聚点 p_0，再由§1定理3知，存在由A中互异的点组成的点列$\{q_i\}$收敛于 p_0。

由A的定义知，$\{q_i\}$的每一项必出现在$\{p_n\}$中，因此我们可按在$\{p_n\}$中的前后位置从$\{q_i\}$中选出一个子列 $\{q_{i_n}\}$，显然$\{q_{i_n}\}$既是$\{p_n\}$的子列又收敛于 p_0。综上推论得证。

定义2 (i) 设 $E\subseteq R^n$，$\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是一开集族，若对任意$p\in E$，总存在$G_p\in\{G_{\alpha\in D}\}$，使 $p\in G_p$，则称开集族$\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$为$E$的一个**开覆盖**（简称**覆盖**）。

(ii) 若E的覆盖$\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$的子族 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in D'}$，$(D'\subseteq D)$也覆盖$E$，则称该子族$\{G_\alpha\}_{\alpha\in D'}$为覆盖$\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 的**子覆盖**。

定理2（林德略夫*）设 $E\subseteq R^n$，$\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是E的一个覆盖，则 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 必有至多可列的一个子族也覆盖E（即E的任意覆盖必有至多可列子覆盖）。

证明 1° 对任一$p\in E$，因 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是E的覆盖，所以存在 $G_p\in\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 使 $p\in G_p$，因 G_p 是开集，故 p 是 G_p 的内点，从而有邻域 $N(p,\delta_p)\subseteq G_p$。

今在$N\left(p,\dfrac{\delta_p}{4}\right)$ 中任取一有理点 a_p（有理点集在 R^n 中稠密故 a_p 存在），再取有理数 r_a，使

$$\frac{\delta_p}{4}<r_a<\frac{\delta_p}{2}$$

做 a_p 的邻域 $N(a_p,r_a)$，由 a_p 与 r_a 的取法，显然有

$p\in N(a_p,r_a)\subseteq N(p,\delta_p)\subseteq G_p$（图2—6） (1)

于是以与E中点 p 相对应的有理点 a_p 为心，有理数 r_a 为半径的邻域族$\{N(a_p,r_a)\}_{p\in E}$ 组成E的一个覆盖。

---

* Lindelöf.

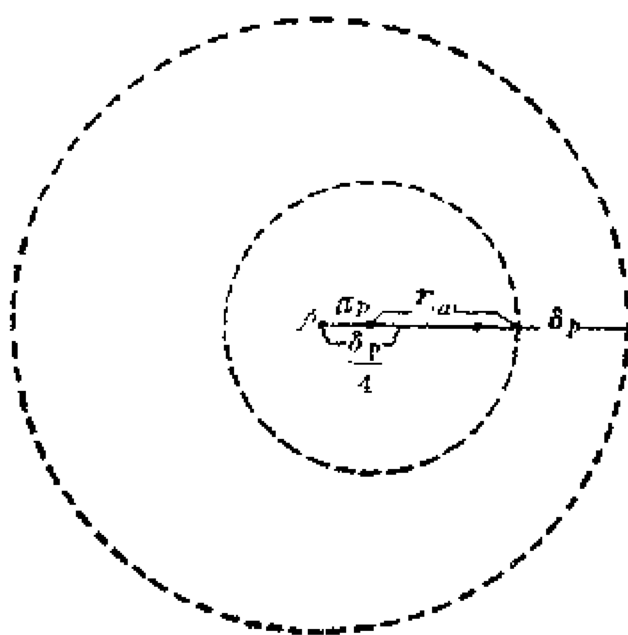


图2—6

2° 因 R^n 中的有理点集和 R^1 中的有理数集都是可列集，从而 $\{N(a_P, r_a)\}_{P\in E}$ 是至多可列的。由1°中式（1）知，每个 $N(a_P, r_a)$都被包含在某个 G_P 内，由这样取定的 G_P 组成的族$\{G_P\}$是$\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 的至多可列子族，且是E的覆盖。于是定理得证。

定理2对任意 $E\subseteq R^n$ 都成立，若限制E为有界闭集，则得到与数学分析中的有限覆盖定理完全类似的定理。

定理3（海恩——波雷尔* 有限覆盖定理）有界闭集的任一开覆盖必有有限子覆盖。

证明 1° 设F是有界闭集，$\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是F的一个覆盖，若 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是有限族或F是有限集，显然结论成立。

2° 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是无限族，F是无限有界闭集。

由定理2知，$\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 必有可列子族 $\{G_n\}_{n\in N}$ 覆盖F，我们来证明能从$\{G_n\}_{n\in N}$中选出有限个开集组成F的覆盖。

---

* Heine—Borel．本定理有时称为紧致性定理．

利用反证法，假设$\{G_n\}$中任意有限个开集都不能覆盖F。于是$\{G_n\}$中的G_1不能覆盖F，故有$F-G_1\neq\phi$，于是可取点$p_1\in F-G_1$。同理可知$F-(G_1\cup G_2)\neq\phi$，故可取到$p_2\in F-(G_1\cup G_2)$。

重复上述过程，设已取得n个点：

$$p_1,p_2,\cdots,p_n \text{ 使 } p_j\in F-\bigcup_{i=1}^{j}G_i$$

显然$F-\bigcup_{i=1}^{n+1}G_i\neq\phi$，(若$F-\bigcup_{i=1}^{n+1}G_i=\phi$，则$\{G_n\}$中有$n+1$个开集覆盖了$F$，这与假设矛盾)，于是可取到

$$p_{n+1}\in F-\bigcup_{i=1}^{n+1}G_i$$

从而由数学归纳法知，我们可以从F中取得点列$\{p_n\}$，使得

$$p_n\in F-\bigcup_{i=1}^{n}G_i \quad (n=1,2,\cdots)$$

3° 因F是有界集，故2°中的点列$\{p_n\}$是有界的。于是由推论1知$\{p_n\}$必有子列$\{p_{n_k}\}$收敛于p_0，又因F是闭集，故$p_0\in F$。但$\{G_n\}$是F的覆盖，故$\{G_n\}$中有G_j使$p_0\in G_j$。因G_j是开集，故存在$N(p_0,\delta_0)\subseteq G_j$。

另一方面，因$p_{n_m}\longrightarrow p_0(k\longrightarrow\infty)$，故对$N(p_0,\delta_0)$应有$n_{k_0}$，使当$n_m\geqslant n_{k_0}$时，有

$$p_{n_m}\in N(p_0,\delta_0)\subseteq G_j$$

今取$n_k\geqslant\max\{n_{k_0},j\}$，显然有

$$p_{n_k}\in N(p_0,\delta_0)\subseteq G_j \tag{1}$$

但由2°中$\{p_{n_k}\}$的取法知，

$$p_{s_k} \in F - \bigcup_{i=1}^{n_k} G_i \tag{2}$$

但 $j \leqslant n_k$，故由式（2）有 $p_{s_k} \notin G_j$，这与式（1）相矛盾。故 $\{G_n\}_{n\in N}$ 必有有限子覆盖，从而 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 亦然。定理证毕。

定理 2 和定理 3 的条件与结论皆不相同，它们是两个独立的定理。定理 3 的证明也可采取其他方法而不借助于定理 2 。

在§1中我们给出了 R^n 中两点间的距离定义，下面我们借此定义来讨论点与点集间以及两点集间的距离问题。

定义 3 (i) 设 $p_0 \in R^n$，E 是 R^n 中的非空子集，p_0 与 E 中点的距离的下确界，称为 P_0 与 E **的距离**，记作 $\rho(p_0, E)$，即

$$\rho(p_0, E) = \inf_{p\in E}\{\rho(p_0, p)\}$$

(ii) 设 A、B 为 R^n 中二非空子集，A 与 B 的点间的距离的下确界，称为点集A与B**的距离**，记作 $\rho(A, B)$，即

$$\rho(A, B) = \inf_{x\in A, y\in B}\{\rho(x, y)\}$$

由上述定义可知：

① 设 p_0 是一点，E 是一点集，对任意 $e \in E$，恒有 $\rho(p_0, e) \geqslant \rho(p_0, E)$；对任意 $p \in A$，$q \in B$，恒有 $\rho(p, q) \geqslant \rho(A, B)$，且点与点集，点集与点集间的距离皆是非负的，即 $\rho(p_0, E) \geqslant 0$，$\rho(A, B) \geqslant 0$。

② 因点 p_0 与点集 E 间的距离，实际上就是单点集$\{p_0\}$与点集 E 间的距离，所以点与点集间的距离是点集间距离的特殊情形。且显然有 $\rho(\{p_0\}, B) = \rho(p_0, B)$。

③ 若 $p_0 \in E$，则 $\rho(p_0, E) = 0$。事实上，因 $\rho(p_0, p_0) = 0$，而 $p_0 \in E$，故有

$$0\leqslant\rho(p_0,E)=\inf_{p\in E}\{\rho(p_0,p)\}\leqslant\rho(p_0,p_0)=0$$

若 $A\cap B\neq\phi$，则 $\rho(A,B)=0$。因有 $p\in A\cap B$，使

$$0\leqslant\rho(A,B)\leqslant\rho(p,p)=0$$

但③的逆不真，即若 $\rho(p_0,E)=0$ 或 $\rho(A,B)=0$，未必有$p_0\in E$ 或 $A\cap B\neq\phi$。

例如，$A=(1,2)$，$B=(2,3)$，则 $\rho(A,B)=0$，但 $A\cap B=\phi$。

事实上，对任意 $\varepsilon>0$，不妨设 $0<\varepsilon<1$，则 $a=2-\dfrac{\varepsilon}{3}\in A$，$b\in 2+\dfrac{\varepsilon}{3}\in B$，于是有

$$0\leqslant\rho(A,B)\leqslant\rho(a,b)=|b-a|=\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon$$

由 ε 的任意性知 $\rho(A,B)=0$。

定理 4 （距离可达定理）设 A、B 是 R^n 中二非空闭集，且其中至少有一闭集有界，则必有 $p_0\in A$，$q_0\in B$，使得

$$\rho(p_0,q_0)=\rho(A,B)$$

证明 我们的目的是在A与B中分别选取适当的点p_0，q_0使其满足 $\rho(p_0,q_0)=\rho(A,B)$。而由 $\rho(A,B)$ 的定义知，它是数集$\{\rho(p,q)\}(p\in A,q\in B)$的下确界，因此自然想到宜从$A$、$B$的点间距离的下确界入手。

1° 因 $\rho(A,B)=\inf\limits_{p\in A,q\in B}\{\rho(p,q)\}$，故由下确界定义可知，对每个 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}>0$，必相应地有 $p_n\in A$，$q_n\in B$，使

$$\rho(A,B)\leqslant\rho(p_n,q_n)<\rho(A,B)+\frac{1}{n}\tag{1}$$

于是可从 A,B 中分别取得点列$\{p_n\}$，$\{q_n\}$使对每个 n 皆适合于式(1)。

2° 由已知条件，不妨设A有界。于是1°中的$\{p_n\}$是有界点列，故由推论1知$\{p_n\}$必有收敛子列$\{p_{n_k}\}$，设其收敛于p_0。因A是闭集，故$p_0\in A$。

现在考察与$\{p_{n_k}\}$相对应的$\{q_n\}$的子列$\{q_{n_k}\}$因为$\{p_n\}$有界，从而$\{p_{n_k}\}$有界，即有$L>0$，使对每个k皆有$\rho(o,p_{n_k})\leqslant L$。于是由式（1），得

$$\rho(o,q_{n_k})\leqslant\rho(o,p_{n_k})+\rho(p_{n_k},q_{n_k})$$
$$<L+\rho(A,B)+\frac{1}{n_k}\leqslant L+\rho(A,B)+1$$

从而$\{q_{n_k}\}$是有界点列，因此它有收敛子列$\{q_{n_{k_i}}\}$，设其收敛于q_0，因B是闭集，故$q_0\in B$。

3° 今证对于2°中的$p_0\in A$，$q_0\in B$，有$\rho(p_0,q_0)=\rho(A,B)$。

显然$\rho(p_0,q_0)\geqslant\rho(A,B)$，故只须证$\rho(p_0,q_0)\leqslant\rho(A,B)$。因为

$$\rho(p_0,q_0)\leqslant\rho(p_0,p_{n_{k_i}})+\rho(p_{n_{k_i}},q_0)$$
$$\leqslant\rho(p_0,p_{n_{k_i}})+\rho(p_{n_{k_i}},q_{n_{k_i}})+\rho(q_{n_{k_i}},q_0)$$
$$<\rho(p_0,p_{n_{k_i}})+\rho(q_{n_{k_i}},q_0)+\rho(A,B)+\frac{1}{n_{k_i}}$$

且当$i\longrightarrow\infty$时，显然有

$$\rho(p_0,p_{n_{k_i}})\longrightarrow 0;\quad \rho(q_{n_{k_i}},q_0)\longrightarrow 0;\quad \frac{1}{n_{k_i}}\longrightarrow 0$$

于是得证$\rho(p_0,q_0)\leqslant\rho(A,B)$。

综上定理得证。

注意 ① 若定理中的二闭集A和B皆非有界，则定理不再成立。如$A=N$，$B=\left\{n+\frac{1}{2n}\right\}$，显然$A'=B'=\phi$，故$A,B$皆

闭集且皆非有界。对任意 $n\in A$, $n+\frac{1}{2n}\in B$, 有 $\rho\left(n,\ n+\frac{1}{2n}\right)$ $=\frac{1}{2n}$。当 $n\longrightarrow\infty$ 时，有

$$\rho\left(n,\ n+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}\longrightarrow 0,\text{从而 } \rho(A,B)=0$$

但显然对任何 $x\in A$, $y\in B$ 均有 $\rho(x,y)>0$。

② 本定理中 A、B 皆为闭集的条件也不能减弱。如 $A=[1,2)$, $B=[3,5]$, 则 A 不是闭集且显然 $\rho(A,B)=1$。但很明显，对任意 $x\in A$, $y\in B$, 均有 $\rho(x,y)>1$, 故 A 与 B 中不存在合于要求的点。

推论 5 设 F_1、F_2 为二非空有界闭集，且 $F_1\cap F_2=\phi$，则 $\rho(F_1,F_2)>0$。

事实上（反证法），若 $\rho(F_1,F_2)=0$，因 F_1 和 F_2 合于定理 4 条件，故存在 $p_0\in F_1$, $q_0\in F_2$, 使

$$\rho(p_0,q_0)=\rho(F_1,F_2)=0$$

从而由距离定义知 $p_0=q_0$, 于是 $p_0=q_0$ 是 F_1 与 F_2 的公共点，这与 $F_1\cap F_2=\phi$ 矛盾，故必有 $\rho(F_1,F_2)>0$。

定理 5 设 A 为非空点集，$d>0$，$B=\{p\,|\rho(p,A)<d\}$，则 $A\subseteq B$, 且 B 为开集。

证明 1° 往证 $A\subseteq B$。因对任意 $p\in A$, 恒有 $\rho(p,A)=0<d$, 从而 $p\in B$, 于是 $A\subseteq B$。

2° 往证 $B=\{p|\ \rho(p,A)<d\}$ 是开集。

设 $p_0\in B$, 由 B 的定义知 $\rho(p_0,A)<d$，从而有 $\varepsilon>0$，使 $\rho(p_0,A)+\varepsilon<d$。因 $\rho(p_0,A)=\inf\limits_{p\in A}\{\rho(p_0,p)\}$, 故由下确界定义知，对于 $\varepsilon<0$, 存在 $p_1\in A$, 使

$$\rho(p_0,p_1)<\rho(p_0,A)+\varepsilon<d$$

令 $\delta_{P_0}=d-\rho(p_0,p_1)>0$，则 $N(p_0,\delta_{P_0})\subseteq B$。

事实上，对任一 $q\in N(p_0,\delta_{P_0})$，有 $\rho(p_0,q)<\delta_{P_0}$，又因 $\rho(p_0,p_1)=d-\delta_{P_0}$，从而有

$$\rho(g,p_1)\leqslant\rho(q,p_0)+\rho(p_0,p_1)<\delta_{P_0}+d-\delta_{P_0}=d$$

但因 $p_1\in A$，故

$$\rho(g,A)\leqslant\rho(q,p_1)<d$$

从而 $q\in B$，所以 $N(p_0,\delta_{P_0})\subseteq B$。因此 p_0 是 B 的内点，即 B 是开集。

定理 6 设点集 A_1、A_2 皆非空，且 $\rho(A,A_2)=d>0$，令

$$B_1=\left\{p\mid\rho(p,A_1)<\frac{d}{2}\right\},\qquad B_2=\left\{p\mid\rho(p,A_2)<\frac{d}{2}\right\}$$ 则

$B_1\cap B_2=\phi$。

证明 （反证法）假设 $B_1\cap B_2\neq\phi$，则存在 $q\in B_1\cap B_2$，从而由 B_1 与 B_2 定义知：

$$\rho(q,A_1)<\frac{d}{2},\quad\rho(q,A_2)<\frac{d}{2}$$

于是由下确界定义知，存在 $p_1\in A_1$，$p_2\in A_2$，使

$$\rho(q,p_1)<\frac{d}{2},\text{且}\rho(q,p_2)<\frac{d}{2}$$

所以有

$$\rho(p_1,p_2)\leqslant\rho(p_1,q)+\rho(q,p_2)<\frac{d}{2}+\frac{d}{2}=d$$

从而有 $\rho(A_1,A_2)\leqslant\rho(p_1,p_2)<d$，这与条件 $\rho(A_1,A_2)=d$ 矛盾。得证 $B_1\cap B_2=\phi$。

定理 7 （隔离性定理）设 F_1、F_2 为二有界闭集，且 $F_1\cap F_2=\phi$，则必存在开集 G_1、G_2，使

$$F_1\subseteq G_1,\quad F_2\subseteq G_2,\text{且 }G_1\cap G_2=\phi$$

证明 由推论 2 知 $\rho(F_1,F_2)=d>0$，于是由定理 5 及定

理 6 知，两个开集：

$$G_1=\left\{p\mid\rho(p,F_1)<\frac{d}{2}\right\},\quad G_2=\left\{p\mid\rho(p,F_2)<\frac{d}{2}\right\}$$

即合于要求。

注意 ① 本定理的条件可减弱为不要求二集有界，但皆为闭集的条件则是必要的，如对 $A=[0,1)$，$B=[1,2]$，显然定理不能成立。

② 单点集是闭集，故对 $p,q\in R^n$，且 $p\neq q$，则由本定理知，必存在开集 G_1,G_2，使

$$p\in G_1,\quad q\in G_2,\text{且 }G_1\cap G_2=\phi$$

在数学分析里给出的 R^1 中收敛点列极限的唯一性，实际上就是基于 R^1 具有上述注②所刻划的隔离性质。

习　　题

1. 设 E 为非空有界点集，且 $E'=\phi$，则E必为有限集。

2. 设 E 为一点集，且 $E'=\phi$，则 E 是至多可列集。

3. 设 E 为不可列集，则 E 至少有一个聚点。

4. 试用海恩——波雷尔有限覆盖定理证明波尔察诺——维尔斯特拉斯定理。

5. 试证 R^n 中任一闭集均可表为可列个开集的交集；R^n 中任一开集均可表为可列个闭集的并集。

6. 试证 $A=\{x\mid\rho(x,M)=0\}$ 是含M的闭集。

7. 试证非空有界下降闭集列必有非空交。

8. 举例说明海恩——波雷尔有限覆盖定理中的“有界”，“闭集”的条件是不可缺少的。

§4 开集、闭集和完备集的构造

在§2中，我们已经讨论过开集、闭集和完备集的一些性

质。本节将致力于讨论它们的结构，且主要在 R^1 中进行。为了后面研究测度与新积分的需要，我们也要研究 R^n 中开集的构造问题。

一、实直线上开集、闭集和完备集的构造

本段讨论的点集皆是 R^1 中的点集。

定义1 设 G 是非空开集，若开区间 (a,b) 满足

$$(a,b)\subseteq G,\ \text{且}\ a,b\notin G$$

则称 (a,b) 为 G 的**构成区间**。

定理1 设 G 是非空有界开集，则 G 的任一点必属于 G 的某一构成区间。

证明 任取 $x_0\in G$，因 G 是开集，故 x_0 是 G 的内点，从而必有含 x_0 的开区间 (α,β)，使得

$$x_0\in(\alpha,\beta)\subseteq G \qquad (1)$$

显然，合于式（1）的开区间会有很多，令合于式（1）的所有开区间组成的开区间族为 $\{(\alpha_\lambda,\beta_\lambda)\}_{\lambda\in D}$，因为G有界，故存在

$$a=\inf_{\lambda\in D}\{\alpha_\lambda\},\quad b=\sup_{\lambda\in D}\{\beta_\lambda\}$$

今证开区间 (a,b) 即为所求。

事实上，$x_0\in(a,b)\subseteq G$ 是明显的，故只须证 $a,b\notin G$。

假如 $a\in G$，因 G 是开集，故有 $\varepsilon<0$，使 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subseteq G$，从而有

$$x_0\in(a-\varepsilon,b)\subseteq G$$

这与 a 的取法相矛盾，故 $a\notin G$。类似可证 $b\notin G$。定理证毕。

定理2 非空有界开集 G 的任意两个构成区间 (λ,μ)、(σ,τ) 或不交或相等，即

$$(\lambda,\mu)\cap(\sigma,\tau)=\phi \quad 或(\lambda,\mu)=(\sigma,\tau).$$

证明 只须证明若二构成区间相交则必相等。

设 $(\lambda,\mu)\cap(\sigma,\tau)\neq\phi$，则有 $x\in(\lambda,\mu)\cap(\sigma,\tau)$，即有

$$\lambda<x<\mu, \quad 且 \quad \sigma<x<\tau$$

于是若 $\tau<\mu$，则 $\lambda<x<\tau<\mu$，因 $(\lambda,\mu)\subseteq G$，故 $\tau\in G$，这与 (σ,τ)是G的构成区间应有 $\tau\notin G$ 相矛盾，从而有 $\tau\geqslant\mu$。同理可证 $\tau\leqslant\mu$，故 $\mu=\tau$。类似可证得 $\lambda=\sigma$。因此 $(\lambda,\mu)=(\sigma,\tau)$。

推论1 非空有界开集G的所有不同的构成区间至多有可列个。

证明 这是第一章§3习题2的直接结果。

定理3 非空有界开集G，恒可表为有限个或可列个两两不交的开区间的并集，这些开区间都是它的构成区间，即

$$G=\bigcup_{k=1}^{m}(\lambda_k,\mu_k),\quad \lambda_k,\mu_k\notin G \quad (m:有限或\infty)$$

证明 1° 由推论1知G的构成区间至多有可列个，设它们为

$$(\lambda_k,\mu_k),\quad k=1,2,\cdots,m \quad (m:有限或\infty)$$

2° 由1°及构成区间定义以及定理1，显然有

$$G\supseteq\bigcup_{k=1}^{m}(\lambda_k,\mu_k),\ G\subseteq\bigcup_{k=1}^{m}(\lambda_k,\mu_k) \quad (m:有限或\infty)$$

于是有

$$G=\bigcup_{k=1}^{m}(\lambda_k,\mu_k),\quad \lambda_k,\mu_k\notin G \quad (m:有限或\infty)$$

注意 ① 定理3指出了 R^1 中非空有界开集的结构，即它可表示为至多可列个互不相交的开区间的并集。并且结合定理2容易看出 R^1 中开集的这种表示还是唯一确定的。

② 对于 R^1 中无界开集，本质上定理3的结论仍然成立。这只须对任意实数 a，把下述的：

$$(-\infty, a),\ (a, +\infty),\ (-\infty, \infty)$$

皆算做构成区间就可以了。

下面我们讨论 R^1 中非空有界闭集的构造。

定理4 非空有界闭集 F 中必有最大点（最大数）和最小点（最小数）。

证明 只须在 F 中选定两点 α, β，使 F 中任意点 x 皆有 $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$。为此显然只须证明 F 的上、下确界都属于 F 即可。

因 F 非空有界，故存在 $\alpha = \inf F$，$\beta = \sup F$。今证 $\alpha, \beta \in F$：

事实上，因 $\beta = \sup F$,，所以对任一 $\varepsilon > 0$，必有 $x_\varepsilon \in F$，使

$$\beta - \varepsilon < x_\varepsilon \leqslant \beta \qquad (1)$$

若对某个 $\varepsilon_0 > 0$，F 中有合于式（1）的 $x_{\varepsilon_0} = \beta$，则有 $\beta = x_{\varepsilon_0} \in F$。

若对任意 $\varepsilon > 0$，F 中合于式（1）的 x_ε 总不等于 β，由于

$$x_\varepsilon \in (\beta - \varepsilon, \beta) \subseteq (\beta - \varepsilon,\ \beta + \varepsilon) = N(\beta, \varepsilon)$$

则由§1定理2知，β 是 F 的聚点，因 F 是闭集，故 $\beta \in F$。类似可证 $\alpha \in F$。于是得证 α、β 即为所求。

由定理4可知，对 R^1 中的任意非空有界闭集 F，必有包含 F 的最小闭区间 $[\alpha, \beta]$，其中 $\alpha = \inf F$，$\beta = \sup F$。

定理5 非空有界闭集 F 若非闭区间，则 F 必是从包含 F 的最小闭区间中去掉有限或可列个互不相交的开区间而成（显然这些开区间的端点皆属于 F）。

证明 实际上，若包含 F 的最小闭区间为 $[\alpha, \beta]$，考虑到

定理3，易知只须证明有被$[\alpha,\beta]$包含的开集 G，使$F=[\alpha,\beta]-G$即可。

由定理4知，存在包含F的最小闭区间$[\alpha,\beta]$，使$F\subseteq[\alpha,\beta]$且 $\alpha,\beta\in F$。显然

$$G=[\alpha,\beta]-F=[\alpha,\beta]\cap\mathscr{C}F=(\alpha,\beta)\cap\mathscr{C}F$$

是非空（因F非闭区间）有界开集，因此由定理3知：

$$G=\bigcup_{k=1}^{m}(\lambda_k,\mu_k)\quad(m\text{：有限或}\infty)$$

而这些开区间(λ_k,μ_k)互不相交，且其端点皆不属于G，从而它们都属于F。

显然 $G\subseteq[\alpha,\beta]$，且有

$$F=[\alpha,\beta]-G=[\alpha,\beta]-\bigcup_{k=1}^{m}(\lambda_k,\mu_k)\quad(m\text{：有限或}\infty)$$

定理得证。

由定理3的说明和本定理的证明过程可看出，本定理对于R^1中的无界闭集仍成立。

定理3和定理5完全解决了 R^1 中开集与闭集的结构问题，下面我们来讨论 R^1 中完备集的构造。

定理6　F是非空有界完备集的充要条件为F是从包含F的最小闭区间中，去掉至多可列个互不相交的没有公共端点（与包含F的最小闭区间也无公共端点）的开区间而成。

证明　1°　由§2完备集定义知，F是完备集的充要条件为F是没有孤立点的闭集。

2°　由定理5知，F是非空有界闭集的充要条件为：F是从包含F的最小闭区间中去掉至多可列个互不相交的开区间的并集而成的集。

3° 显然 x 是F的孤立点的充要条件为：x 是被去掉的两个开区间的公共端点，或是被去掉的开区间与包含F的最小闭区间的公共端点。

综合1°、2°、3°，定理得证。

二、R^n 中开集的构造

在 n 维欧氏空间 $R^n(n>1)$ 中，没有构成区间的概念，从而象 R^1 中定理 3 那样的开集构造命题不复存在。为了探讨 R^n 中开集的结构问题，我们首先给出下述概念。

定义 2 设 $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n$ 是 n 组数（允许取 $\pm\infty$），使

$$a_i \leqslant b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

则

（1）称 R^n 中点集

$$I=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid a_i<x_i<b_i, i=1,2,\cdots,n\}$$

为 R^n 中开长方体。特别地，当$b_i-a_i=d \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 时，称 I 为开正方体。

（2）称 R^n 中点集

$$I=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i=1,2,\cdots,n\}$$

为 R^n 中闭长方体。当 $b_i-a_i=d(i=1,2,\cdots,n)$时，称 I 为闭正方体。

（3）称 R^n 中点集

$$I=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid a_i<x_i \leqslant b_i, \quad i=1,2,\cdots,n\}$$

为左开长方体。当 $b_i-a_i=d \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 时，称 I 为左开正方体。

（4）对 R^n 中点集

$$I=\{x=(x_1,x_2,\cdots x_n) \mid x_i \in <a_i, b_i>, \quad i=1,2,\cdots,n\},$$

其中 $<a_i, b_i>$表示分别以 a_i, b_i 为左，右端点的任意区间(即它可以是开的、闭的或半开半闭的)，统称之为**长方体**.

（5）设

$$I=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in<a_i,b_i>, i=1,2,\cdots,n\}$$

是 R^n 中之一长方体，则称积

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=(b_1-a_1)\times(b_2-a_2)\times\cdots\times(b_n-a_n)$$

为 I 的体积，记作 $|I|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$.

由上述定义可知：

① 在开长方体的定义中，若有 i 使 $a_i=b_i$，显然这时 $I=\phi$，故空集 ϕ 是开长方体，且 $|\phi|=0$.

② 设 E 为 R^n 中有界集，显然必有长方体 I，使 $I\supseteq E$.

③ R^n 中的开（闭）长方体，当 $n=1$ 时，恰与 R^1 中开（闭）区间概念一致，半开（闭）的情形也是一致的.

④ 当 $n=2$ 时，R^2 中开、闭长方体

$$I=\{x=(s,t)\mid a_1<s<b_1,\ \ a_2<t<b_2\}$$

$$I'=\{x=(s,t)\mid a_1\leqslant s\leqslant b_1,\ \ a_2\leqslant t\leqslant b_2\}$$

分别是长 $=b_1-a_1$，宽 $=b_2-a_2$ 的不带边和带边的矩形.

定理 7 R^n 中任意非空开集 G，必是可列个互不相交的左开长方体

$$I_1, I_2, \cdots, I_m, \cdots$$

的并集，即

$$G=\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i,\quad I_i\cap I_j=\phi\quad(i\neq j)$$

不失一般性，我们仅就 R^2 情形证之.

证明 1° 用两组直线

$x=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots; y=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$将平面分割成可列个左开正方体(下称左开正方形)，它们的边长均为$\frac{1}{2^0}=1$，且两两不交，并称它们为一阶左开正方形，记为

$$I^{(1)}_k \quad (k=1,2,\cdots)$$

同理，用两组直线

$$x=\frac{n}{2}, \quad y=\frac{m}{2} \quad (n, m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

也把 R^2 分割成可列个两两不交的左开正方形，其边长均为$\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$，称它们为二阶左开正方形，记为

$$I_k^{(2)} \quad (k=1,2,\cdots)$$

依此类推，一般地，对自然数 i，则可将 R^2 分割成可列个两两不交的 i 阶左开正方形，其边长均为 2^{1-i}，将它们记为

$$I_k^{(i)} \quad (k=1,2,\cdots)$$

显然每个 i 阶左开正方形，都可分为四个 $i+1$ 阶左开正方形。

2° 设G是 R^2 中非空开集，对任一 $p\in G$，因 p 是G之内点，故由 $I_k^{(i)}$ 的作法（当 $i\to\infty$时，I_k^i 的边长 $2^{1-i}\to 0$）知，必有 $I_m^{(i)}$ 使 $p\in I_m^{(i)}\subseteq G$。

把完全被G包含的所有一阶左开正方形组成的族记为$\mathscr{F}_1$；

把不被$\mathscr{F}_1$ 中的一阶左开正方形所包含，但被G所包含的所有二阶左开正方形的族记为$\mathscr{F}_2$。依此类推，得到一列由左开正方形组成的族：

$$\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \cdots, \mathscr{F}_n, \cdots$$

特别地，对每个 n，$\mathscr{F}_n$ 中的左开正方形都被G所包含，且$\mathscr{F}_n$

中的 n 阶左开正方形不被 $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \cdots, \mathscr{F}_{n-1}$ 中的左开正方形所包含.

因每个 $\mathscr{F}_n(n=1,2,\cdots)$都至多可列，所以由所有的$\mathscr{F}_n$中的左开正方形组成的族仍是可列的. 因之我们不妨把这个族中的各阶左开正方形用统一的新的文字表示为

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_l, \cdots\} = \{A_l\}_{l\in N}$$

且由这些 A_l 的取法知，当 $i \neq j$ 时必有 $A_i \cap A_j = \phi$.

3° $G = \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l$.

$G \supseteq \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l$ 是显然的，只须证 $G \subseteq \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l$.

设 $p \in G$, 由2°知必有 $I_m^{(p)}$ 使 $p \in I_m^{(p)} \subseteq G$，从而 $I_m^{(p)}$ 是 $\{A_l\}_{l\in N}$ 中元素，即 $I_m^{(p)} \in \{A_l\}_{l\in N}$, 故有

$$p \in I_m^{(p)} \subseteq \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l$$

得证 $G \subseteq \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l$. 综上定理得证.

由上述定理及其证明可知：

① 因为左开长方体的并集一般说来显然未必是开集，故定理 7 的逆命题不真.

② 实直线 R^1 的开集的构造是唯一的，但 $R^n(n>1)$ 的开集的构造表示显然不是唯一的，且用本定律的证法可证得下述结果：

R^n 中任意非空开集 G，可表示为无公共内点的闭立方体的并集.

如果在定理 7 的结果中去掉"互不相交"要求，则可得到

R^n 中开集构造的另一种刻划.

定理8 设G是 R^n 的非空开集，则G可以表示为至多可列个开长方体的并集，即

$$G=\bigcup_{i=1}^{m} I_i \quad (m\text{: 有限或}\infty)$$

证明 对任一 $p\in G$，因 p 是G之内点，故存在 p 的邻域 $N(p,\delta_p)$，使

$$p\in N(p,\delta_p)\subseteq G$$

于是由开长方体的定义知，必存在开长方体 I_p（只须把n组数 a_i, b_i，$i=1,2,\cdots,n$ 都取得充分接近），使得

$$p\in I_p\subseteq N(p,\delta_p)\subseteq G \tag{1}$$

于是满足式（1）的所有开长方体族 $\{I_p\}_{p\in G}$ 是 G 的一个覆盖，从而由§3林德略夫定理知，$\{I_p\}_{p\in G}$ 有至多可列子族$\{I_n\}$也覆盖 G，即

$$G\subseteq\bigcup_{n=1}^{m} I_n \quad (m\text{: 有限或}\infty)$$

另一方面，由式（1）知，对任意 n 皆有 $I_n\subseteq G$. 从而有

$$G\supseteq\bigcup_{n=1}^{m} I_n \quad (m\text{: 有限或}\infty)$$

综上得证 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{m} I_n$ （m: 有限或∞）.

本节关于开集结构的讨论是十分重要的，由已知的开集结构不难看出，关于开集性质的研究可以转化为对相应空间的长方体的性质的讨论，亦即可以借助于长方体的性质来研究开集. 关于长方体的性质我们是相当清楚的，这样就使得我们更容易掌握开集的性质，而开集则是我们今后讨论问题的重要基

础。

本节给出的长方体及其体积等概念也是重要的，在今后的学习中要多次遇到。

习　　题

1．实直线R^1中的有界闭集是否一定是由孤立点和闭区间所组成？

2．试证实直线 R^1 中的闭区间$[a,b]$不能表成两个不相交的非空闭集的并。

3．试证实直线 R^1 不能表为可列个两两不交的闭区间的并。

4．设 G_1,G_2 是 R^1 中开集，且 $G_1\subseteq G_2$，试证 G_1 的每个构成区间必含在 G_2 的某个构成区间之中。

5．在实直线上已给闭区间$[a,b]$与完备集 E，且闭区间之端点不属于E。证明集 $E\cap[a,b]$为完备集。

第三章　勒贝格(Lebesgue)测度

实变函数论的中心问题是建立一种新的积分，即勒贝格积分的理论．

古典数学分析理论，基本上是处理连续函数的．比如，我们所熟知的旧的积分定义的实质，是将区间分成有限个小区间，在每个小区间上把 $f(x)$ 近似地看成常数，然后通过对近似程度的不断改进，而完成过渡到精确的任务．要使这样的作法得以实行，就必须要求函数 $f(x)$ 在这些小区间上的值"变动不大"，即 $f(x)$ 必须基本上是连续的．如果 $f(x)$ "很不连续"，则不论小区间的长度如何小，我们也不可能把$f(x)$近似地看成一个常数，这就发生了不可积的问题．

正是由于旧的理论过多的依赖了函数的连续性，因之常常使所建立的理论不够完备．这就不仅使其应用受到限制，也会严重地影响到理论的进一步发展．如在黎曼积分理论中，要逐项积分，一般要求一致收敛性．我们知道一致收敛这一条件是相当强的，因而常常或者得不到满足或者招致论证上的麻烦，还有一些问题也有类似的情况．

随着科学实践和理论的日益发展，对函数连续性过多依赖的旧的理论就显得非常不够了．新的积分理论就是为了要消除旧的积分理论的缺陷．因此，新的积分理论应当适用于比连续函数更为一般的函数．

如果 $f(x)$ 是不连续函数，讨论它的积分问题，对函数定

义域的分法仅限于分为小区间显然是不行的了，还应当考虑到新的分法，特别是分为一些小集合，使得 $f(x)$ 在每一个这样的小集合上都变化不大的那种分法。当然对于这样的分法，在作"积分和"时，就不能再用小区间的长度而应当代之以小集合的"测度"；所以要改进积分定义，就必须先研究一般点集的测度，即要先解决测度问题。

从以上分析可以看出，所谓测度问题，就是要把只适用于区间的"长度"概念扩充到更一般的点集上去。对于一般的 n 维欧氏空间来说，就是要把只适用于"长方体"（或其它一些初等图形）的"体积"概念扩充到一般的点集上去。

§1 实直线 R^1 中点集的测度

为了便于理解一般的 n 维欧氏空间中点集的测度问题，我们先来研究实直线 R^1 中点集的测度，即把 R^1 中区间 $\langle a, b\rangle$ 的长度 $b-a$ 这一概念推广到 R^1 中一般点集上去。

定义 1 区间 $\langle a,b\rangle$ 的长度 $b-a$，称为区间 $\langle a,b\rangle$ 的测度，记作

$$m\langle a,b\rangle = b-a$$

显然对 R^1 中任何非空区间 $\langle \alpha,\beta\rangle(\alpha<\beta)$，其测度恒大于零，且 $m\phi=0$。

引理 1 设区间 $\langle a,b\rangle$ 包含有限个互不重叠（即除端点可重合外没有公共内点）的区间

$$\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \cdots, \langle a_n, b_n\rangle$$

则

$$\sum_{i=1}^{n} m\langle a_i, b_i\rangle \leqslant m\langle a,b\rangle$$

证明　不妨设

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$$

又因$\langle a_i, b_i\rangle$与$\langle a_{i+1}, b_{i+1}\rangle$不相重叠，故有

$$b_i \leqslant a_{i+1} \quad (i=1,2,\cdots, n-1)$$

于是有

$$L=(a_1-a)+(a_2-b_1)+\cdots+(a_n-b_{n-1})+(b-b_n) \geqslant 0$$

从而由

$$m\langle a, b\rangle=\sum_{i=1}^{n} m\langle a_i, b_i\rangle+L$$

证得引理1。

推论1　如果区间$\langle a, b\rangle$包含可列个互不重叠的区间$\{\langle a_n, b_n\rangle\}_{n\in N}$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\langle a_n, b_n\rangle \leqslant m\langle a, b\rangle$$

证明　作为练习，读者自证。

定义2　设G为非空有界开集，而

$$(a_i, b_i) \quad (i=1,2,\cdots,k;\ k\ \text{有限或}\infty)$$

是G的构成区间，则称G的所有构成区间长度的和为G的测度，记作

$$mG=\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i) \quad (k\text{：有限或}\infty)$$

由非空有界开集测度定义可知：

① 任意有界开集G的测度必是非负有限的（参见本节习题1）。

② 如果$\langle a, b\rangle$是一包含开集G的区间，则有$mG \leqslant m\langle a, b\rangle$。因为$mG$等于它的所有构成区间长度的和，而每个

构成区间都被 $\langle a,b\rangle$ 所包含，从而由引理1及推论1知$mG\leqslant\langle a,b\rangle$。

例1　在第二章§2中曾介绍过康托集 F，它是从$[0,1]$中删去可列个互不相交的开区间而得到的。被删去的可列个开区间的并集，即康托开集 G_0 显然是有界开集。

我们知道 G_0 是经过一系列步骤得到的，第一步取一长度为$\frac{1}{3}$的开区间$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$；第二步是添加两个长度均为$\frac{1}{9}$的开区间$\left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right)$及$\left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)$；第三步是添加四个开区间，它们的长度均为$\frac{1}{27}$，依此类推。并且我们知道，组成 G_0 的这些开区间两两不交，即它们是 G_0 的构成区间，于是由定义2，有

$$mG_0=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots=1$$

即 $mG_0=m[0,1]=1$。

引理2　设G是非空有界开集，$(a,\ b)\subseteq G$，则G必有某个构成区间 (α,β)，使得 $(a,b)\subseteq(\alpha,\beta)$。

证明　设 $x\in(a,b)$，因 $(a,\ b)\subseteq G$，故 $x\in G$，于是G有构成区间(α,β)，使 $x\in(\alpha,\beta)$。下面证 $(a,b)\subseteq(\alpha,\beta)$。

事实上（反证法），假设 $(a,\ b)\nsubseteq(\alpha,\beta)$，如果

$$\beta<b$$

则必有 $\beta\in(a,\ b)$，从而有 $\beta\in G$。这与(α,β) 是G的构成区间应有 $\beta\notin G$ 矛盾。故必有 $b\leqslant\beta$。同理可证必有 $\alpha\leqslant a$，所以有 $(a,b)\subseteq(\alpha,\beta)$。引理证毕。

定理1　设 G_1，G_2 是二有界开集，且 $G_1\subseteq G_2$，则$mG_1\leqslant mG_2$。

证明　只须证明对任意 $\varepsilon>0$，恒有 $mG_1<mG_2+\varepsilon$。1°若

$G_1=\phi$，显然结论成立。若 $G_1\neq\phi$，不失一般性，不妨设 G_1，G_2 皆有可列个构成区间，分别为

$$\{(a_i,b_i)\}_{i\in N},\ \{(c_k,\ d_k)\}_{k\in N}$$

因为 G_1，G_2 都是有界开集，所以有

$$\sum_{i=1}^{\infty}m(a_i,\ b_i)=mG_1<+\infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(c_k,d_k)=mG_2<+\infty \qquad (1)$$

即式（1）中的两个级数都是收敛的，所以它们的余项都趋于零。故对任意 $\varepsilon>0$，必存在自然数 n_ε，使

$$\sum_{i=1}^{\infty}m\ (a_i,\ b_i)\ -\sum_{i=1}^{n_\varepsilon}m(a_i,b_i)<\varepsilon$$

即

$$mG_1=\sum_{i=1}^{\infty}m(a_i,b_i)<\sum_{i=1}^{n_\varepsilon}m(a_i,b_i)+\varepsilon \qquad (2)$$

2° 因 $G_1\subseteq G_2$，故对 G_1 的任一构成区间 $(a_i,\ b_i)\subseteq G_1$，必有 $(a_i,b_i)\subseteq G_2$。于是由引理 2 知，G_2 必有唯一构成区间 $(c_k,\ d_k)\subseteq G_2$，使得

$$(a_i,b_i)\subseteq(c_k,d_k)$$

今设 G_2 的分别包含式（2）中 (a_i,b_i)（$i=1,2,\cdots,\ n_\varepsilon$）的所有构成区间 $(c_k,\ d_k)$ 的最大下标为 l，于是显然有

$$\bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon}(a_i,b_i)\subseteq\bigcup_{k=1}^{l}(c_k,d_k)$$

所以有

$$\sum_{i=1}^{n_\varepsilon}m(a_i,b_i)\leqslant\sum_{k=1}^{l}m(c_k,d_k)$$

从而由式（2）得

$$mG_1<\sum_{i=1}^{n_\varepsilon}m(a_i,b_i)+\varepsilon\leqslant\sum_{k=1}^{l}m(c_k,d_k)+\varepsilon\leqslant mG_2+\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$的任意性，得证 $mG_1\leqslant mG_2$.

定理1说明，“大的”有界开集的测度必然大于“小的”开集的测度．这种性质我们称之为**有界开集测度的单调性．**

推论2 有界开集G的测度是一切可能包含G的有界开集G'的测度的下确界，即

$$mG=\inf_{G\subseteq G'}\{mG'\}\quad(G'\text{为有界开集})$$

证明 作为练习，读者自证．

定理2 若有界开集G是有限个或可列个互不相交的开集的并集，即

$$G=\bigcup_{i=1}^{k}G_i\quad(G_i\cap G_j=\phi,\ i\neq j,\ k\text{:有限或}\infty)$$

则

$$mG=\sum_{i=1}^{k}mG_i\qquad(k\text{:有限或}\infty)$$

先作一些分析：因为由定义2知，对每个 G_i，它的测度 mG_i 就等于 G_i 所有构成区间长度的和，而这些开集 G_i 又是互不相交的，因此只须证明 G 的一切构成区间恰好就是所有 G_i 的构成区间的全体．

证明 1° 设 G 的构成区间族为

$$\{(\alpha_j,\beta_j)\}\ (j=1,2,\cdots,m;\ m\text{ 有限或 }\infty)$$

G_i $(i=1,2,\cdots,k;k$ 有限或$\infty)$ 的构成区间族为

$$\{(\lambda_n^{(i)},\ \mu_n^{(i)})\}\ (n=1,2,\cdots,l_i;\ l_i\text{有限或 }\infty)$$

2° 对每个i，G_i 的构成区间 $(\lambda_n^{(i)},\mu_n^{(i)})$ 必是 G的构成区

间。

事实上，设 $(\lambda_n^{(i)}, \mu_n^{(i)})$ 是 G_i 的构成区间，因为 $G=\bigcup_{i=1}^{k} G_i$，从而有$(\lambda_n^{(i)}, \mu_n^{(i)})\subseteq G$，于是由构成区间定义知，只须证明端点$\lambda_n^{(i)}$，$\mu_n^{(i)}\notin G$。

假若 $\mu_n^{(i)}\in G=\bigcup_{i=1}^{k} G_i$ 必有 i'，使$\mu_n^{(i)}\in G_{i'}$，因为$(\lambda_n^{(i)}, \mu_n^{(i)})$是$G_i$ 的构成区间，所以$\mu_n^{(i)}\notin G_i$，故 $i'\neq i$；

另外，$G_{i'}$ 是开集，而 $\mu_n^{(i)}\in G_{i'}$，故 $G_{i'}$ 必有构成区间$(\lambda_m^{(i')}, \mu_m^{(i')})$，使

$$\mu_n^{(i)}\in(\lambda_m^{(i')}, \mu_m^{(i')})\subseteq G_{i'} \qquad (1)$$

注意到 $\mu_n^{(i)}$是 $(\lambda_n^{(i)}, \mu_n^{(i)})$的端点，而 $(\lambda_m^{(i')}, \mu_m^{(i')})$ 是开区间，且$\lambda_m^{(i')}<\mu_n^{(i)}<\mu_m^{(i')}$，于是有

$$(\lambda_n^{(i)}, \mu_n^{(i)})\cap(\lambda_m^{(i')}, \mu_m^{(i')})\neq\phi$$

从而 $G_i\cap G_{i'}\neq\phi\ (i'\neq i)$，这与 $G_i\cap G_j=\phi\ (i\neq j)$ 矛盾，所以 $\mu_n^{(i)}\notin G$。

同理可证 $\lambda_n^{(i)}\notin G$，得证 $(\lambda_n^{(i)}, \mu_n^{(i)})$是 G 的构成区间。

3° G 的任一构成区间 (α_j, β_j) 必与某个 G_i 的某个构成区间 $(\lambda_n^{(i)}, \mu_n^{(i)})$ 相等。从而结合 2° 知，G 的一切构成区间恰好是所有 G_i 的构成区间的全体。

事实上，设(α_j, β_j)是G的一个构成区间，且 $x\in(\alpha_j, \beta_j)$。因 $G=\bigcup_{i=1}^{k} G_i$，故必有某个 G_p 使 $x\in G_p$，从而 G_p 必有构成区间 $(\lambda_m^{(p)}, \mu_m^{(p)})$ 使

$$x\in(\lambda_m^{(p)}, \mu_m^{(p)})$$

且已知 $x\in(\alpha_j, \beta_j)$，故有

$$(\alpha_j, \beta_j)\cap(\lambda_m^{(p)}, \mu_m^{(p)})\neq\phi$$

但由 2° 知 $(\lambda_m^{(p)}, \mu_m^{(p)})$也是 G 的构成区间，于是由构成区间

的性质知

$$(\alpha_j,\ \beta_j)=(\lambda_m^{(j)},\ \mu_m^{(j)})$$

4° 结合2° 及3° 以及有界开集测度定义，得

$$mG=\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{n=1}^{l_i}m(\lambda_n^{(i)},\ \mu_n^{(i)})$$

但

$$\sum_{n=1}^{l_i}m(\lambda_n^{(i)},\mu_n^{(i)})=mG_i$$

从而有

$$mG=\sum_{i=1}^{k}mG_i \qquad (k\text{:有限或}\infty)$$

定理证毕。

定理2所反映的性质称为有界开集测度完全可加性．如果把定理2的条件放宽些，即当不要求两两不交时，则得到比定理2较广的结果，如定理3．

引理3　设闭区间$[a,\ b]$被有限个开区间$\{(\lambda_i,\ \mu_i)\}_{i\in N_n}$ $(N_n=\{1,2,\cdots,\ n\})$所覆盖，则

$$b-a=m\,[a,\ b]<\sum_{i=1}^{n}m(\lambda_i,\mu_i)=\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\lambda_i)$$

容易理解，只须在$[a,\ b]$的覆盖$\{(\lambda_i,\ \mu_i)\}_{i\in N_n}$中选出一个子覆盖$\{(\lambda_{i_k},\ \mu_{i_k})\}_{k\in N_l}$ $(l\leqslant n)$，使得子覆盖中的每个开区间$(\lambda_{i_k},\ \mu_{i_k})$总包含着相邻的前一个开区间$(\lambda_{i_{k-1}},\mu_{i_{k-1}})$的右端点，显然由此即得

$$b-a<\sum_{k=1}^{l}m(\lambda_{i_k},\ \mu_{i_k})=\sum_{k=1}^{l}(\mu_{i_k}-\lambda_{i_k})\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\lambda_i)$$

证明 1° 对于$[a,b]$的左端点 a，因为 $\{(\lambda_i,\mu_i)\}_{i\in N}$，是 $[a, b]$ 的覆盖，故至少存在某个 (λ_j,μ_j)，使$a\in(\lambda_j,\mu_j)$，今记(λ_j, μ_j)为$(\lambda_{i_1}, \mu_{i_1})$。于是有

$$a\in(\lambda_{i_1}, \mu_{i_1})$$

从而$\lambda_{i_1}<a<\mu_{i_1}$。于是，如果$\mu_{i_1}>b$，显然有

$$b-a<\mu_{i_1}-\lambda_{i_1}<\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\lambda_i)$$

即结论成立。

若$\mu_{i_1}\leqslant b$，则$\mu_{i_1}\in[a, b]$。故在覆盖$\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{i\in N}$中至少存在一个开区间，记作$(\lambda_{i_2}, \mu_{i_2})$，使得

$$\mu_{i_1}\in(\lambda_{i_2}, \mu_{i_2})$$

从而$\lambda_{i_2}<\mu_{i_1}<\mu_{i_2}$。于是，如果$\mu_{i_2}>b$，显然$\{(\lambda_{i_1},\mu_{i_1}),(\lambda_{i_2},\mu_{i_2})\}$即合要求。

若$\mu_{i_2}\leqslant b$，则因$\mu_{i_2}\in[a,b]$，同理知$\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{i\in N}$中必存在一个开区间，记作$(\lambda_{i_3}, \mu_{i_3})$，使得

$$\mu_{i_2}\in(\lambda_{i_3}, \mu_{i_3})$$

从而 $\lambda_{i_3}<\mu_{i_2}<\mu_{i_3}$。

如果，$\mu_{i_3}>b$，问题已解决。若 $\mu_{i_3}\leqslant b$，则我们可以再进行上述同样手续。因 $\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{i\in N}$中只有有限多个开区间，而我们从覆盖中每次选出的开区间必与已选出的开区间不同（因为选出的开区间的右端点是严格增大的），所以上述选取手续不能无限次进行，进行到 l 次时，最后必有

$$(\lambda_{i_l}, \mu_{i_l})\in\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{i\in N}$$

使得

$$\mu_{i_l}>b,\ 而\ \mu_{i_{l-1}}\leqslant b$$

2° 设依 1° 中所述方法从$\{(\lambda_i, \mu_i)\}_{i\in N}$中选出的 l 个

开区间组成的族为$\{(\lambda_{i_k}, \mu_{i_k})\}_{k\in N_l}$，显然它是$[a, b]$的覆盖，且

$$\lambda_{i_{k+1}}<\mu_{i_k}(k=1,2,\cdots, l-1) \quad (\text{图} 3-1)$$

所以有

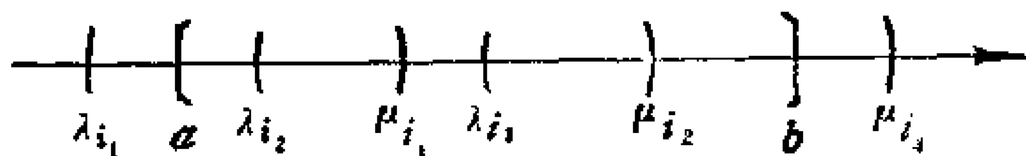


图3—1

$$\sum_{k=1}^{l}(\mu_{i_k}-\lambda_{i_k})<\sum_{k=1}^{l-1}(\lambda_{i_{k+1}}-\lambda_{i_k})+(\mu_{i_l}-\lambda_{i_l})=\mu_{i_l}-\lambda_{i_1}$$

又因

$$\mu_{i_l}-\lambda_{i_1}>b-a$$

所以有

$$\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\lambda_i)\geqslant\sum_{k=1}^{l}(\mu_{i_k}-\lambda_{i_k})\geqslant\mu_{i_l}-\lambda_{i_1}>b-a$$

引理证毕。

引理4 设区间 $(a, b)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}G_i$，$G_i$是(有界)开集($i=1,2,\cdots,k$；$k$ 有限或∞)，则

$$m(a,b)\leqslant\sum_{i=1}^{k}mG_i \quad (k\text{:有限或}\infty)$$

证明 1° 设$(a, b)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}G_i$ (k:有限或∞)，只须证明对任意 $\varepsilon>0$，恒有

$$m(a, b)<\sum_{i=1}^{k}mG_i+\varepsilon$$

为此，不妨设每个 G_i 皆有可列个构成区间 $\{(\lambda_n^{(i)},\mu_n^{(i)})\}_{n\in N}$.

2° 设 $0<\varepsilon<\frac{b-a}{2}$，于是有

$$[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]\subseteq(a,\ b)$$

由 1° 显然构成区间族

$$\{(\lambda_n^{(i)},\ \mu_n^{(i)})\}\ (i=1,2,\cdots,k;\ k\text{:有限或}\infty,\ n=1,2,\cdots)$$

是 $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$ 的覆盖，于是由第二章§3定理 3（紧致性定理）知应有有限个构成区间

$$\{(\lambda_{n_l}^{(i_s)},\ \mu_{n_l}^{(i_s)})\}\ (s=1,2,\cdots,p;\ l=1,2,\cdots,M_s)$$

覆盖了 $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$。从而由引理 3 有

$$b-a-2\varepsilon<\sum_{s=1}^{p}\sum_{l=1}^{M_s}m(\lambda_{n_l}^{(i_s)},\ \mu_{n_l}^{(i_s)})$$

即

$$b-a<\sum_{s=1}^{p}\sum_{l=1}^{M_s}m(\lambda_{n_l}^{(i_s)},\ \mu_{n_l}^{(i_s)})+2\varepsilon$$

于是有

$$\begin{aligned}b-a&<\sum_{s=1}^{p}\sum_{l=1}^{M_s}m(\lambda_{n_l}^{(i_s)},\ \mu_{n_l}^{(i_s)})+2\varepsilon\\&\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}m(\lambda_n^{(i)},\ \mu_n^{(i)})+2\varepsilon\\&=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}m\ (\lambda_n^{(i)},\ \mu_n^{(i)})\right)+2\varepsilon\\&=\sum_{i=1}^{k}mG_i+2\varepsilon\qquad(k\text{:有限或}\infty)\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，得

$$b-a\leqslant\sum_{i=1}^{k} mG_i \qquad (k\text{:有限或}\infty)$$

引理得证。

定理 3 设有界开集 $G=\bigcup_{i=1}^{k}G_i$，G_i 是（有界）开集（k：有限或∞），则

$$mG\leqslant\sum_{i=1}^{k} mG_i \qquad (k\text{:有限或}\infty)$$

证明 设 G 的构成区间族为 $\{(a_j,\ b_j)\}_{j\in N}$，于是

$$mG=\sum_{j=1}^{\infty} m(a_j,b_j)$$

但由条件知

$$(a_j,\ b_j)\ =\ (a_j,\ b_j)\ \cap\ \left(\bigcup_{i=1}^{k}G_i\right)=\bigcup_{i=1}^{k}((a_j,\ b_j)\cap G_i)$$

因对每个 G_i，$(a_j,b_j)\cap G_i$ 皆是有界开集，于是由引理 4 有

$$m(a_j,\ b_j)\ \leqslant\sum_{i=1}^{k} m\Big((a_j,\ b_j)\ \cap G_i\Big)$$

因此有

$$mG=\sum_{j=1}^{\infty} m(a_j,\ b_j)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{k} m\Big((a_j,\ b_j)\cap G_i\Big)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{\infty} m\Big((a_j,b_j)\cap G_i\Big)\right] \qquad (1)$$

另一方面，显然有

$$G_i=G_i\cap G=G_i\cap\ \left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j)\right)$$

$$=\bigcup_{j=1}^{\infty}((a_j,\ b_j)\cap G_i)$$

因为 $\{(a_j,\ b_j)\}_{j\in N}$ 是 G 的构成区间族，故

$$(a_l,\ b_l)\cap(a_m,\ b_m)=\phi \qquad (l\neq m)$$

从而有

$$[(a_l,\ b_l)\cap G_i]\cap[(a_m,\ b_m)\cap G_i]=\phi \qquad (l\neq m)$$

于是由定理 2 有

$$\sum_{j=1}^{\infty} m[(a_j,\ b_j)\cap G_i]=mG_i \qquad (2)$$

结合式（1）和式（2），得证

$$mG\leqslant\sum_{i=1}^{k} mG_i \qquad (k\text{:有限或}\infty)$$

定理 3 所反映的性质，称为**有界开集测度的次可加性。**

下面我们讨论有界闭集的测度问题。

定义 3 设 F 是非空有界闭集，任取一开区间 $(a,\ b)$，使 $(a,\ b)\supseteq F$，令

$$G=(a,b)-F=(a,b)\cap\mathscr{C}F$$

显然 G 是有界开集，则称 $(a,\ b)$ 的长度减去 G **的测度为** F **的测度**，即

$$mF=b-a-mG=b-a-m[(a,b)-F]$$

可以证明，有界闭集 F 的测度与开区间 $(a,\ b)$ 的选择无关，这在几何上来看是很显然的。

例 2 设有界闭集 F 是闭区间 $[1,\ 2]$，当取开区间 $(0,\ 3)$ 时，则有 $F\subseteq(0,3)$，令

$$G=(0,3)-F=(0,3)-[1,2]=(0,1)\cup(2,3)$$

因 $(0,1)\cap(2,3)=\phi$，于是由定理 2 知

$$mG=m(0,1)+m(2,3)=1+1=2$$

从而由定义 3 有

$$mF = m[1,2] = 3 - 0 - mG = 3 - 2 = 1$$

当取开区间$\left(\frac{1}{2},\ 4\right)$时，显然 $F\subseteq\left(\frac{1}{2},\ 4\right)$，令

$$G = \left(\frac{1}{2},\ 4\right) - F = \left(\frac{1}{2},\ 4\right) - [1,2] = \left(\frac{1}{2},\ 1\right) \cup (2, 4)$$

于是有

$$mG = m\left(\frac{1}{2},\ 1\right) + m(2,4) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

从而

$$mF = m[1,2] = 4 - \frac{1}{2} - mG = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} = 1$$

例 3 设F是康托集，G_0是康托开集，取开区间$(-1,2)$，则$F\subseteq(-1,2)$. 令

$$G = (-1,2) - F = (-1,2) - ([0,1] - G_0)$$
$$= (-1,0) \cup (1,2) \cup G_0$$

显然上式右端三个开集是互不相交的，于是由定理 2 及例 1 有

$$mG = m(-1,0) + m(1,2) + mG_0 = 1 + 1 + 1 = 3$$

从而

$$mF = m(-1,2) - mG = 3 - 3 = 0$$

由第二章§2 知康托集 F 是具有连续基数c的完备集，此例说明基数为 c 的点集，其测度可能等于零，这一事实应特别注意。

例 4 设 F 是有限个互不相交的闭区间的并集，即

$$F = [a_1,\ b_1] \cup [a_2,\ b_2] \cup \cdots \cup [a_n,\ b_n]$$

其中当$i\neq j$时，有$[a_i, b_i] \cap [a_j,\ b_j] = \phi$，则

$$mF = \sum_{i=1}^{n} m[a_i, b_i] = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

证明 作为练习，读者自证。

定理 4 有界闭集F的测度是非负的，即对任意有界闭集F，恒有$mF \geqslant 0$。

证明，设F是有界闭集，任取开区间$(a, b) \supseteq F$，令$G=(a,b)-F$，从而结合定理1有

$$G \subseteq (a, b), \quad mG \leqslant m(a,b)=b-a$$

于是由有界闭集测度定义知

$$mF=b-a-mG \geqslant 0$$

定理 5 设F_1，F_2皆是有界闭集，且$F_1 \subseteq F_2$，则$mF_1 \leqslant mF_2$。

证明 设开区间$(a, b) \supseteq F_2$，则$(a, b) \supseteq F_1$

令

$$G_1=(a, b)-F_1, \quad G_2=(a,b)-F_2$$

则有$G_1 \supseteq G_2$（因$F_1 \subseteq F_2$），于是由定理1有$mG_1 \geqslant mG_2$，从而由有界闭集测度定义知

$$mF_1=b-a-mG_1 \leqslant b-a-mG_2=mF_2$$

定理5所反映的性质，称为**有界闭集测度的单调性**。

前面我们给出了有界开、闭集测度定义，并初步讨论了它们的最基本的性质。进而将研究R^1中一般有界点集的测度问题，为此先给出有界点集的内、外测度概念。

定义 4 设E是一有界点集，则称包含E的全部有界开集G的测度的下确界为E的外测度，记作

$$m^*E=\inf_{G \supseteq E}\{mG\}, \quad G\text{为有界开集}$$

由有界点集外测度定义可知：

①对任意有界点集E，它的外测度m^*E必存在，且$0 \leqslant m^*E < +\infty$。

②若$E=\phi$，则有$m^*E=m^*\phi=0$，因$\phi \subseteq \phi$，且$m\phi=0$，从而有$m^*\phi=0$。但其逆不真，例如R^1中的任一单点集$\{a\}$，显然

有$m^*\{a\}=0$. 事实上，对任意$\varepsilon>0$，有$\{a\}\subseteq\left(a-\frac{\varepsilon}{2}, a+\frac{\varepsilon}{2}\right)$，从而

$$0\leqslant m^*\{a\}=\inf_{G\supseteq\{a\}}\{mG\}\leqslant m\left(a-\frac{\varepsilon}{2}, a+\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$$

由$\varepsilon>0$的任意性，得$m^*\{a\}=0$。

③设E是有界点集，对任意$\varepsilon>0$，由外测度定义 4 可知，必存在有界开集G_ε，使$E\subseteq G_\varepsilon$，且$m^*E\leqslant mG_\varepsilon<m^*E+\varepsilon$。

定义 5 设E是一有界点集，则称被E包含的闭集的测度的上确界为E的**内测度**，记为

$$m_*E=\sup_{F\subseteq E}\{mF\},\qquad F\text{为（有界）闭集}$$

由有界点集内测度定义可知：

① 因空集ϕ是任何点集的闭子集，且$m\phi=0$，故对任意有界点集E，其内测度m_*E必存在，且有$0\leqslant m_*E<+\infty$。

② 对空集ϕ显然有$m_*\phi=0$，但其逆不真。如对单点集$\{a\}$，则被$\{a\}$包含的闭集只有$\{a\}$和ϕ，且显然有$m\{a\}=0=m\phi$，从而$m_*\{a\}=0$。

③ 设E是有界点集，对任意$\varepsilon>0$，由E的内测度定义知，必存在闭集F_ε，使$E\supseteq F_\varepsilon$，且$m_*E-\varepsilon<mF_\varepsilon\leqslant m_*E$。

定理 6 设E是有界点集，则$m_*E\leqslant m^*E$。

我们先作一点分析：由内、外测度定义知，只须证明下述不等式成立

$$\sup_{F\subseteq E}\{mF\}\leqslant\inf_{G\supseteq E}\{mG\}\tag{1}$$

其中F为闭集，G为有界开集，式（1）左端是一数集的上确界，右端是一数集的下确界，故欲证式（1）成立，显然需要证明左端数集中的任一数都不超过右端数集中的任一数，即需证明对任意闭集$F\subseteq E$和任意有界开集$G\supseteq E$，恒有

$$mF \leqslant mG \tag{2}$$

如果式（2）成立，则对任一有界开集$G \supseteq E$，有

$$\sup_{F \subseteq E}\{mF\} \leqslant mG \tag{3}$$

由$G \supseteq E$的任意性及式（3），使得

$$\sup_{F \subseteq E}\{mF\} \leqslant \inf_{E \subseteq G}\{mG\}$$

证明 1° 设 E 是有界点集，G是包含E的任意有界开集，F是被E包含的任意闭集，即 $F \subseteq E \subseteq G$。今证恒有

$$mF \leqslant mG \tag{1}$$

事实上，任取开区间 $(a,b) \supseteq G$，则

$$F \subseteq E \subseteq G \subseteq (a,\ b)$$

从而有

$$(a,\ b) = G \cup [(a,\ b) - F] \tag{2}$$

于是由有界闭集的测度定义有

$$mF = m(a,b) - m[(a,b) - F] \tag{3}$$

且由式（2）及定理 3 知

$$m(a,b) \leqslant mG + m[(a,b) - F] \tag{4}$$

结合式（3）及（4）得 $mF \leqslant mG$。

2° 由1°中式（1）可知，对任一有界开集 $G \supseteq E$，都有

$$\sup_{F \subseteq E}\{mF\} \leqslant mG \tag{5}$$

因式（5）对任意开集 $G \supseteq E$ 恒成立，故有

$$m_*E = \sup_{F \subseteq E}\{mF\} \leqslant \inf_{E \subseteq G}\{mG\} = m^*E$$

定理证毕。

前面已经提及，对任意有界点集E，它的内测度 m_*E 和外测度 m^*E 总是存在的，且由定理 6 知它们的大小有 $m_*E \leqslant m^*E$ 关系。实际上，使关系 $m_*E < m^*E$ 和 $m_*E = m^*E$ 成立的点集E都存在，但是具有应用意义的是那种具有 $m_*E = m^*E$

性质的点集E，称为**可测集**。且称 m^*E 为E的测度，记作mE。

因为我们主要是讨论更为一般的 R^n 中点集的测度问题，自然 R^n 中点集的测度性质都适用于 R^1 中点集情况，因之对 R^1 中点集的测度问题在这里就不再作进一步的讨论了。

习　　题

1．试证任意有界开集G的测度必是非负有限的。

2．实直线上至少含有一个内点的集 E 的测度可否等于零？

3．设E是实直线上不可测集，A 是测度为零的集，则 $E\cap\mathscr{C}A$ 必是不可测集。

4．设 $E\subsetneqq R^1$ 且 $m^*E>0$，问是否 E 中必含有区间？

5．设 A 是一个具有正测度的可测集，则 A 中必有两点 x 与y，此两点的距离为一有理数。

6．E 为实直线上有界集合，若 $m^*E=p>0$，则对于任一小于p的正数 q，必存在E的子集 E_1，使 $m^*E_1=q$。

§2　$\mathbf{R}^n$ 中点集的内、外测度及其性质

在§1中我们简单介绍了 R^1 中有界点集的测度问题。在此基础上，从本节起将进一步研究 R^n 中点集的可测性，为此首先给出 R^n 中点集的内、外测度概念。

定义1　设E是 R^n 中一点集，$I_1, I_2, \cdots, I_m, \cdots$是 R^n 中一列开长方体，且 $E\subseteq\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}I_m$，则$\sum\limits_{m=1}^{\infty}|I_m|$ 确定一个非负的数 α（或$+\infty$），所有这样的数 α 组成的数集显然是下方有界的，因此有下确界，则称此下确界为E的**外测度**，记作

$$m^*E=\inf_{E\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\right\}$$

简记为

$$m^*E=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\right\}$$

由外测度定义可知：

① R^n 中的任意点集 E，其外测度必存在，且 $0\leqslant m^*E\leqslant +\infty$。

② 由下确界定义知，对任意开长方体列 $\{I_n\}$，使 $E\subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$，则 $m^*E\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n|$；对任意 $\varepsilon>0$，必相应地存在一列开长方体 $\{I_n\}$，使 $E\subseteq\sum\limits_{n=1}^{\infty} I_n$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|<m^*E+\varepsilon$$

关于外测度，有下列四个基本性质：

(Ⅰ) $0\leqslant m^*E\leqslant +\infty$；$E=\phi$，则有 $m^*E=0$；

(Ⅱ) 如果 $A\supseteq B$，则 $m^*A\geqslant m^*B$；

(Ⅲ) $m^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}m^*A_n$；

(Ⅳ) 若 A、B 之间的距离 $\rho(A,B)>0$。则

$$m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B$$

性质（1）显然成立。

性质(Ⅱ)的证明：设 I_1，I_2，…，I_n，…是任意一列开长方

体，且 $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，因 $A\supseteq B$，故必有 $B\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，于是由外测度定义有

$$m^*B\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| \tag{1}$$

注意到 $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ 及式（1），显然有

$$m^*B\leqslant\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|I_n\right|\right\}=m^*A$$

性质(Ⅱ)的证明：只须证对任一 $\varepsilon>0$，皆有

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)<\sum_{n=1}^{\infty}m^*A_n+\varepsilon$$

事实上，对任一 $\varepsilon>0$，由外测度定义知，对于每个 A_n，都相应地有一列开长方体

$$I_{n,1},\ I_{n,2},\ \cdots,\ I_{n,m},\cdots$$

使 $\qquad A_n\subseteq\bigcup_{m=1}^{\infty}I_{n,m}$

且有 $\quad \sum_{m=1}^{\infty}\left|I_{n,m}\right|<m^*A_n+\frac{\varepsilon}{2^n}$

从而有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}I_{n,m}$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|I_{n,m}\right|<\sum_{n=1}^{\infty}\left(m^*A_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}m^*A_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}m^*A_n+\varepsilon$$

但由(II)及外测度定义有

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}I_{n,m}\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|I_{n,m}|$$

于是有

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)<\sum_{n=1}^{\infty}m^*A_n+\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$的任意性，得证 $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*A_n$。

性质(IV)的证明：由(III)知

$$m^*(A\cup B)\leqslant m^*A+m^*B$$

故只须证 $m^*(A\cup B)\geqslant m^*A+m^*B$，为此只须借助条件 $\rho(A,B)>0$，证得对任意 $\varepsilon>0$，恒有

$$m^*(A\cup B)+\varepsilon\geqslant m^*A+m^*B$$

为简便起见，仅就 R^1 的情形证之。

由外测度定义知对任意 $\varepsilon>0$，相应地有一列开区间I_1，I_2，…，I_n，…，使

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\supseteq A\cup B$$

且有
$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|<m^*(A\cup B)+\varepsilon$$

设 $\rho(A,B)=d>0$，现将上面的开区间 I_n 分成两类：

1°，I_n 的长度 $|I_n|<d$ 的全体，记为 $\{I'_n\}$，

2°，I_n 的长度 $|I_n|\geqslant d$ 的全体，记为 $\{I''_n\}$。对于2°类

中的每个 I''_n，可用分点将其分成有限多个小开区间δ_{ni}，使其都有 $|\delta_{ni}|<d$；然后，再将这些分点用有限多个小开区间$\varDelta_\delta$ 分别的包起来，使每个 $|\varDelta_\delta|<d$ 且满足

$$\sum\left|\varDelta_\delta\right|<\frac{\varepsilon}{2^n}$$

因为每个分点都是单点集，显然上述作法是能够办到的。于是我们得到三种类型的小开区间：

第一种　属于1°类的小开区间 I'_n；

第二种　把2°类中的小开区间I''_n，用有限多个分点分得的新的小开区间 δ_{ni}；

第三种　包含分点的小开区间 $\varDelta_\delta$。

显然上述三种小开区间组成的族仍是可列的，因此我们不妨把它们用新的文字统一记为

$$k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_l,\ \cdots$$

不难看出这列小开区间$\{k_l\}$具有下述性质：

(i) $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}k_l\supseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n\supseteq A\cup B$.

(ii) $|k_l|<d$.

(iii) $$\sum_{l=1}^{\infty}|k_l|<\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|+\varepsilon$$
$$<\left[m^*(A\cup B)+\varepsilon\right]+\varepsilon.$$

因为 $\rho(A,B)=d$，而各小开区间的长度 $|k_l|<d$，故由 $\rho(A,B)$ 的定义可知，每个 k_l 都不能同时含有A 和 B 中的点，于是开区间列 k_1，k_2，$\cdots$ k_l $\cdots$可分为两组：

第一组，含A的点的，记为

$k_{l_1}, k_{l_2}, \cdots, k_{l_i}, \cdots$

第二组，含 B 的点的，记为

$k_{m_1}, k_{m_2}, \cdots, k_{m_j}, \cdots$

于是有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} k_{l_i} \supseteq A, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} k_{m_j} \supseteq B$$

从而由(iii)有

$$m^*(A \cup B) + 2\varepsilon > \sum_{l=1}^{\infty} |k_l| = \sum_{i=1}^{\infty} |k_{l_i}| + \sum_{j=1}^{\infty} |k_{m_j}| \geqslant$$

$$\geqslant m^*A + m^*B$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性，有

$$m^*(A \cup B) \geqslant m^*A + m^*B$$

综上得证 $m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B$

定义 2 设 E 是 R^n 中一点集，I 是包含 E 的长方体；$I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots$ 是一列开长方体，且 $I - E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$，则称上确界

$$\sup_{\substack{E \subseteq I \\ I - E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n}} \left\{ |I| - \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \right\}$$

为 E 的**内测度**，简记为

$$m_*E = \sup \left\{ |I| - \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \right\}$$

由内测度定义可知：

① 因为$\left\{|I|-\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\right\}$的上确界是对所有包含 $I-E$ 的开长方体列 $\{I_n\}$ 取的，且显然$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$的值越小，$|I|-\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$的值越大．所以有

$$m_*E=\sup\left\{|I|-\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\right\}=|I|-\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\right\}$$

$$=|I|-m^*(I-E).$$

② 内测度也具有和外测度基本相应的一些简单性质，但对我们来说并不需要，故不再讨论．

R^n 中点集E的内、外测度概念的直观意义，分别相当于用圆的内接多边形的面积和外切多边形的面积来近似圆的面积．如果说外测度表示的是从外面往里面"挤"的话，则内测度表示的就是从里面往外面"胀"．我们仍以平面中的点集为例来说明内测度的情况．

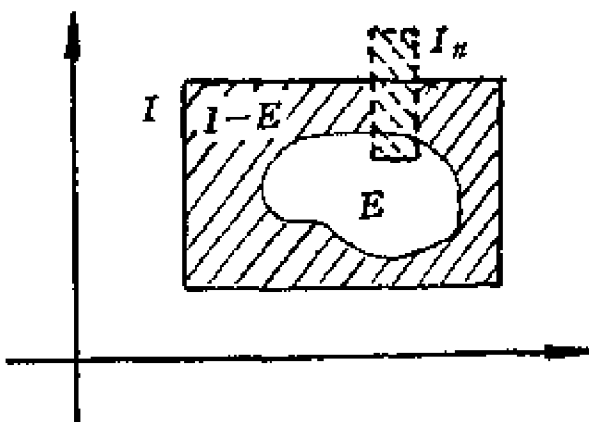


图3—2

设E是 R^2 中有界点集，I 是包含E 的开矩形，I_1，I_2，…，I_n，…是包含 $I-E$ 的一列开矩形，因为 $E\subseteq I$，$I-E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，所以有 $I-\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\subseteq E$．而这个 $I-\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$就有圆的内接多边形的作用（图3—2）．

习　题

1．设 I 是长方体，证明$m^*I=|I|$．

2. 若E 包含开长方体 $I\neq\phi$，则 $m^*E>0, m_*E>0$。

3. 设 E为可列点集，则 $m^*E=0$。

4. 设 E_1，E_2 是任意二点集，且其中至少有一个集的外测度有限，则

$$m^*(E_1-E_2)\geqslant m^*E_1-m^*E_2$$

5. 试证$[0,1]$中的无理数集的外测度为1。

6. 试证可列多个外测度为零的点集之并集的外测度仍为零。

7. 若 $m^*A=0$，则于任意点集 B，恒有

$m^*(A\cup B)=m^*B$

8. 若 $m^*(E_1\setminus E_2)=m^*(E_2\setminus E_1)=0$，则

$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1\cap E_2)=m^*E_1=m^*E_2$

§3　可测集及其性质

在§2中我们引入了 R^n 中点集的外测度和内测度概念．就某种意义来说，这两种测度已经都把“体积”概念推广到一般的点集上去了，但这两种测度都不能满足我们建立新积分理论的要求，比如由外测度的基本性质(IV)知，两个点集 A, B 的外测度可以相加的条件是 $\rho(A,B)>0$．人们已经作出反例说明 $\rho(A,B)>0$ 的条件不能减弱为 $A\cap B=\phi$．但是根据我们处理长度、面积、体积问题的经验，只要两个图形不相交时，它们的面积（长度、体积）就应该是可以相加的．特别是不相交点集的测度等于它们的测度的和，即测度可加性又是我们定义积分时所必不可少的性质．

人们发现破坏外测度的可加性的集合同样也破坏内测度的可加性，而且对于这样的集合来说，一定有 $m^*E>m_*E$，这也就是破坏测度可加性的关键所在。我们称使 $m^*E>m_*E$ 成立

的点集E为**不可测集**，并给出下述概念。

定义 1 设E是R^n中有界集，若$m^*E=m_*E$，则称E为**有界可测集**，此时并称E的外测度值（或内测度值）为E的测度，记作

$$mE=m^*E=m_*E$$

显然空集ϕ可测，且$m\phi=0$。对任意有界可测点集E，恒有$mE\geqslant 0$。

定义 2 设E是无界点集，若对任何长方体I，$E\cap I$都是有界可测集，则称E为**无界可测集**。

以后我们把有界和无界两种可测集统称为可测集。

定理 1 点集E可测的充分必要条件是对于任意点集T，恒有

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap \mathscr{C}E)$$

证明 从略。关于它的证明读者可参看主要参考文献[1]。

定理 1 的条件对于可测集是充分必要的，当然这一条件也可以作为可测集的定义，以后我们将经常用它来检验点集的可测性。

定理 2 点集E可测的充分必要条件是对于任意$A\subseteq E$，$B\subseteq \mathscr{C}E$，恒有

$$m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B.$$

证明 **必要性** 设E是可测集，由定理 1 知，对任意点集T，恒有

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap \mathscr{C}E)$$

令$T=A\cup B$，因$A\subseteq E$，$B\subseteq \mathscr{C}E$，所以$A\cap B=\phi$，$A\cap \mathscr{C}E=\phi$，且$B\cap E=\phi$。从而

$$T\cap E=(A\cup B)\cap E=(A\cap E)\cup(B\cap E)=A$$

$$T\cap \mathscr{C}E=(A\cup B)\cap \mathscr{C}E=(A\cap \mathscr{C}E)\cup(B\cap \mathscr{C}E)=B$$

于是有

$$m^*(A\cup B)=m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap \mathscr{C}E)$$
$$=m^*A+m^*B.$$

充分性　由定理1知，只须证明对任意点集 T，恒有

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap \mathscr{C}E)$$

事实上，对任意点集 T，令 $A=T\cap E$，$B=T\cap \mathscr{C}E$，则显然有

$$A\cup B=(T\cap E)\cup(T\cap \mathscr{C}E)=T\cap(E\cup \mathscr{C}E)=T$$

且 $A\subseteq E$，$B\subseteq \mathscr{C}E$。于是由条件知

$$m^*T=m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B$$
$$=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap \mathscr{C}E).$$

定理3　点集 E 可测的充分必要条件是补集 $\mathscr{C}E$ 可测。

证明　必要性　因 E 可测，故对任意点集 T 恒有

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap \mathscr{C}E) \tag{1}$$

但恒有

$$m^*(T\cap E)+m^*(T\cap \mathscr{C}E)$$
$$=m^*(T\cap \mathscr{C}E)+m^*(T\cap \mathscr{C}(\mathscr{C}E)) \tag{2}$$

于是对任意点集 T，恒有

$$m^*T=m^*(T\cap \mathscr{C}E)+m^*(T\cap \mathscr{C}(\mathscr{C}E)) \tag{3}$$

故由定理1知 $\mathscr{C}E$ 可测.

充分性　因 $\mathscr{C}E$ 可测，故对任意点集 T 恒有式（3）成立，从而由式（2）知，对任意点集 T 恒有式（1）成立，所以 E 是可测集。

定理4　设 E_1, E_2 都是可测集，则 $E_1\cup E_2$ 也是可测集；并且若 $E_1\cap E_2=\phi$，则对任意点集 T，恒有

$$m^*[T\cap(E_1\cup E_2)]=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2)$$

证明　欲证 $E_1\cup E_2$ 可测，只须证明对任意点集 T，恒有

$$m^*T = m^*[T \cap (E_1 \cup E_2)] + m^*[T \cap \mathscr{C}(E_1 \cup E_2)]$$

事实上，显然对任意点集 T 与E_1，E_2之间有如图 3—3 的一般关系，其中

$$A = T \cap E_1 - E_2,\quad B = T \cap E_2 - E_1$$

$$C = T \cap E_1 \cap E_2,\quad D = T - E_1 - E_2$$

于是有

$$T = A \cup B \cup C \cup D$$

$$A \cup C \subseteq E_1,$$

$$B \cup D \subseteq \mathscr{C} E_1$$

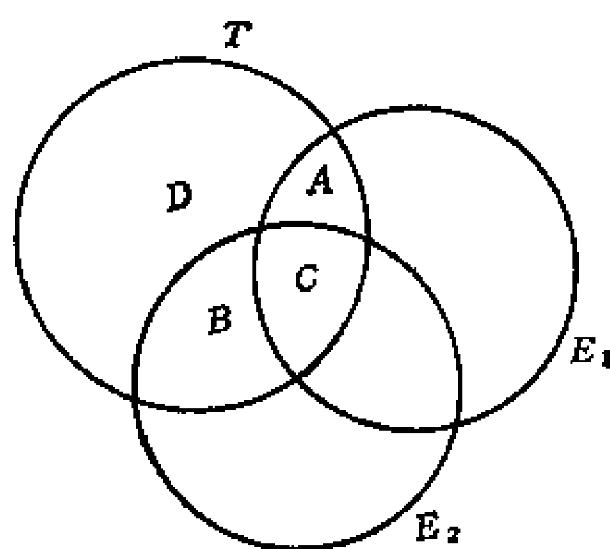


图3—3

因为 E_1可测，则有

$$m^*T = m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap \mathscr{C} E_1)$$

但是，$T \cap E_1 = A \cup C$，$T \cap \mathscr{C} E_1 = B \cup D$，故有

$$m^*T = m^*(A \cup C) + m^*(B \cup D) \qquad (1)$$

取 $T_1 = A \cup B \cup C$，则有 $T_1 \cap E_1 = A \cup C$，$T_1 \cap \mathscr{C} E_1 = B$，仍由 E_1可测知

$$m^*T_1 = m^*(T_1 \cap E_1) + m^*(T_1 \cap \mathscr{C} E_1)$$
$$= m^*(A \cup C) + m^*B$$

即

$$m^*(A \cup B \cup C) = m^*(A \cup C) + m^*B \qquad (2)$$

取$T_2 = B \cup D$，则有$T_2 \cap E_2 = B$，$T_2 \cap \mathscr{C} E_2 = D$，因$E_2$ 可测，故有

$$m^*T_2 = m^*(T_2 \cap E_2) + m^*(T_2 \cap \mathscr{C} E_2) = m^*B + m^*D$$

即

$$m^*(B \cup D) = m^*B + m^*D \qquad (3)$$

将式（2）和（3）代入式（1），得

$$m^*T = m^*(A \cup B \cup C) + m^*D$$

而 $A \cup B \cup C = T \cap (E_1 \cup E_2)$，$D = T \cap \mathscr{C}(E_1 \cup E_2)$，于是有

$$m^*T = m^*[T \cap (E_1 \cup E_2)] + m^*[T \cap \mathscr{C}(E_1 \cup E_2)]$$

从而由T的任意性及定理1知，$E_1 \cup E_2$ 是可测集。

因为 $E_1 \cap E_2 = \phi$，于是有 $E_1 \subseteq \mathscr{C}E_2$，$E_2 \subseteq \mathscr{C}E_1$，从而对任意点集$T$，有 $T \cap E_1 \subseteq E_1$，$T \cap E_2 \subseteq \mathscr{C}E_1$，又因 E_1 可测，故由定理2知，

$$\begin{aligned} m^*[T \cap (E_1 \cup E_2)] &= m^*[(T \cap E_1) \cup (T \cap E_2)] \\ &= m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_2) \end{aligned}$$

推论1 如果E_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）都是可测集，则 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 也是可测集；并且当$E_i \cap E_j = \phi$（$i \neq j$）时，对任意点集T，恒有

$$m^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} m^*(T \cap E_i)$$

证明 显然有限次重复应用定理4即可得到欲证结果。

定理5 如果 E_1, E_2都是可测集，则$E_1 \cap E_2$也是可测集。

证明 由定理3知，只须证明 $\mathscr{C}(E_1 \cap E_2)$ 可测。因为 $\mathscr{C}(E_1 \cap E_2) = \mathscr{C}E_1 \cup \mathscr{C}E_2$，从而只须证明 $\mathscr{C}E_1 \cup \mathscr{C}E_2$ 可测。

事实上，已知 E_1，E_2 都可测，于是由定理3知 $\mathscr{C}E_1$，$\mathscr{C}E_2$ 皆可测。再由定理4知$\mathscr{C}E_1 \cup \mathscr{C}E_2$可测，从而$\mathscr{C}(E_1 \cap E_2)$可测。由定理3知 $E_1 \cap E_2$ 是可测集。

推论2 如果E_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）都是可测集，则 $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$也是可测集。

证明 已知$E_i(i=1,2,\cdots,n)$都可测，从而由定理3知，$\mathscr{C}E_i$皆可测。于是由推论1知$\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{C}E_i$可测，故$\mathscr{C}\left(\bigcap_{i=1}^{n}E_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{C}E_i$可测。再由定理3知$\bigcap_{i=1}^{n}E_i$是可测集。

显然，有限次重复应用定理5亦可得到欲证结果。

定理6 如果E_1，E_2都是可测集，则E_1-E_2也是可测集。

证明 已知E_1，E_2，都可测，于是由定理3及定理5知，$E_1\cap\mathscr{C}E_2$可测。但$E_1-E_2=E_1\cap\mathscr{C}E_2$，故$E_1-E_2$是可测集。

定理7（测度的单调性） 如果E_1，E_2都可测，且$E_1\subseteq E_2$，则$mE_1\leqslant mE_2$。

证明 由可测集的测度定义知，$mE_1=m^*E_1$，$mE_2=m^*E_2$，从而只须证明$m^*E_1\leqslant m^*E_2$。

事实上，已知$E_1\subseteq E_2$，从而由外测度性质(II)知，$m^*E_1\leqslant m^*E_2$，又因E_1，E_2可测，故有

$$mE_1\leqslant m^*E_1\leqslant m^*E_2=mE_2$$

定理8（测度完全可加性） 如果$E_i(i=1,2,\cdots)$都是可测集，且$E_i\cap E_j=\phi$ $(i\neq j)$，则$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$也可测，且

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}mE_i$$

证明 首先证明$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$可测。为此，由定理1知，只须证明对任意点集$T$，恒有

$$m^*T = m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right] + m^*\left[T\cap\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]$$

于是，只须证明上式左端≥右端，并且左端≤右端

往证左端≥右端：由推论1知，对任意自然数 n，$\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ 都可测，故对任意点集T，恒有

$$m^*T = m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right] + m^*\left[T\cap\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right]$$

$$\geqslant m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right] + m^*\left[T\cap\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m^*(T\cap E_i) + m^*\left[T\cap\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]$$

因对任意自然数 n，上述不等式恒成立，故当 $n\to\infty$ 时，有

$$m^*T\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i) + m^*\left[T\cap\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right] \quad (1)$$

又由外测度性质(Ⅱ)知，

$$\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i)\geqslant m^*\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}(T\cap E_i)\right]$$

$$= m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]$$

于是证得

$$m^*T\geqslant m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right] + m^*\left[T\cap\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]$$

往证左端 ≤ 右端：事实上，由于 $T=\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]\cup$

$\left[T\cap\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]$，于是由外测度性质(Ⅱ)知，

$$m^*T\leqslant m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]+m^*\left[T\cap\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]$$

综上证得对任意点集 T，恒有

$$m^*T=m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]+m^*\left[T\cap\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]$$

故 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 是可测集。

其次证明 $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}mE_i$。

往证左端≥右端：令 $T=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，由前面证明部分知 T 可测，且

$$T\cap\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\phi,\quad m^*(T\cap E_i)=m^*E_i=mE_i$$

因对任意点集 T，前面证明部分中的式（1）恒成立，故对 $T=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，应有

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=m^*T\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i)$$
$$+m^*\left[T\cap\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}mE_i+m^*\phi=\sum_{i=1}^{\infty}mE_i$$

往证左端≤右端：因 $E_i(i=1,2,\cdots)$，$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 皆可测，故由可测集的测度定义及外测度性质(Ⅲ)知

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*E_i=\sum_{i=1}^{\infty}mE_i$$

综上定理全部证毕。

推论 3 如果 $E_i(i=1,2,\cdots)$ 都可测，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 也可测。

证明 显然只须把 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 化成互不相交的可列个可测集的并集，为此，令

$$S_1=E_1,\ S_n=E_n-E_{n-1}-\cdots-E_1\ (n=2,3,\cdots)$$

则 $S_n(n=1,2,\cdots)$都是可测集，且有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=E_1\cup(E_2-E_1)\cup(E_3-E_2-E_1)\cup\cdots=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$$

很明显，当 $n\neq m$ 时，有 $S_n\cap S_m=\phi$，故由定理 8 知 $\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$ 可测，从而 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 可测。

定理 9 如果 $E_i(i=1,2,\cdots)$都是可测集，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i$ 也是可测集。

证明 因为

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \mathscr{C}\left(\mathscr{C}\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{C} E_i\right)$$

且已知每个E_i可测，从而每个$\mathscr{C} E_i$都可测，于是由推论3知 $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{C} E_i$可测，故$\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{C} E_i\right)$可测，即$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$可测。

定理10 设（i）E_1，E_2，…，E_n，… 是一列可测集；

（ii）$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq \cdots$，$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \lim\limits_{n \to \infty} E_n$；

（iii）T是任一点集．则

$$m^*(T \cap E) = \lim_{n \to \infty} m^*(T \cap E_n)$$

证明 往证左端≥右端：因为$E \supseteq E_n$，故对任意点集T，有$T \cap E \supseteq T \cap E_n$，从而

$$m^*(T \cap E) \geqslant m^*(T \cap E_n) \ (n = 1, 2, \cdots) \qquad (1)$$

又因 $T \cap E_{n+1} \supseteq T \cap E_n$，所以 $m^*(T \cap E_{n+1}) \geqslant m^*(T \cap E_n)$ ($n =$ 1，2，…)，即数列 $\{m^*(T \cap E_n)\}$ 是单调增加的，从而极限 $\lim\limits_{n \to \infty} m^*(T \cap E_n)$存在（可能为$+\infty$），于是由式（1）知

$$m^*(T \cap E) \geqslant \lim_{n \to \infty} m^*(T \cap E_n)$$

往证左端≤右端：显然，若存在k使$m^*(T \cap E_k) = +\infty$，则结论成立。不妨假设$m^*(T \cap E_n) < +\infty$ ($n = 1, 2, \cdots$)。

因为 $E_{n-1} \subseteq E_n$，故对任意点集T，恒有

$$T \cap E_n = (T \cap E_n - T \cap E_{n-1}) \cup (T \cap E_{n-1}) \qquad (2)$$

但 $T \cap E_{n-1} \subseteq E_{n-1}$，且

$$\begin{aligned} T \cap E_n - T \cap E_{n-1} &= T \cap (E_n - E_{n-1}) \\ &= T \cap E_n \cap \mathscr{C} E_{n-1} \subseteq \mathscr{C} E_{n-1} \end{aligned}$$

因 E_{n-1} 可测，故由定理2及式（2）知

$$m^*(T\cap E_n)=m^*(T\cap E_n-T\cap E_{n-1})+m^*(T\cap E_{n-1})$$

而 $m^*(T\cap E_{n-1})\leqslant m^*(T\cap E_n)<+\infty$，所以有

$$m^*(T\cap E_n-T\cap E_{n-1})=m^*(T\cap E_n)-m^*(T\cap E_{n-1})\tag{3}$$

令 $E_0=\phi$，由条件 ii) 显然有 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n-E_{n-1})$。注意到外测度性质(Ⅲ)及式（3），得

$$\begin{aligned}
m^*(T\cap E)&=m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n-E_{n-1})\right)\right]\\
&=m^*\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(T\cap E_n-T\cap E_{n-1})\right]\\
&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(T\cap E_n-T\cap E_{n-1})\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[m^*(T\cap E_n)-m^*(T\cap E_{n-1})\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[m^*(T\cap E_i)-m^*(T\cap E_{i-1})\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}m^*(T\cap E_n)
\end{aligned}$$

综上得证

$$m^*(T\cap E)=\lim_{n\to\infty}m^*(T\cap E_n).$$

定理11 设

(i) E_1, E_2, …, E_n, … 是一列可测集；

(ii) $E_1\supseteq E_2\supseteq\cdots\supseteq E_n\supseteq\cdots$, $E=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=\lim_{n\to\infty}E_n$；

(iii) T是任一点集，且 $m^*T<+\infty$。则

$$m^*(T\cap E)=\lim_{n\to\infty}m^*(T\cap E_n)$$

证明　1°　往证　$m^*(T\cap \mathscr{C}E)=\lim\limits_{n\to\infty}m^*(T\cap \mathscr{C}E_n)$。

事实上，因 $E_n(n=1,2,\cdots)$都可测，且

$$E_1\supseteq E_2\supseteq\cdots\supseteq E_n\supseteq\cdots,\quad E=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=\lim_{n\to\infty}E_n$$

从而 $\mathscr{C}E_n(n=1,2,\cdots)$也都可测，且

$$\mathscr{C}E_1\subseteq \mathscr{C}E_2\subseteq\cdots\subseteq \mathscr{C}E_n\subseteq\cdots,$$

$$\mathscr{C}E=\mathscr{C}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}E_i=\lim_{n\to\infty}\mathscr{C}E_n$$

于是由定理10知

$$m^*(T\cap \mathscr{C}E)=\lim_{n\to\infty}m^*(T\cap \mathscr{C}E_n)\qquad (1)$$

2°　因为 E_n 都可测，由定理 9 知 $E=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 也可测，故对任意点集 T，恒有

$$m^*T=m^*(T\cap E_n)+m^*(T\cap \mathscr{C}E_n)\qquad (2)$$

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap \mathscr{C}E)\qquad (3)$$

因由条件 iii) 知，$m^*(T\cap \mathscr{C}E_n)\leqslant m^*T<+\infty$，故由式（2）有

$$m^*(T\cap E_n)=m^*T-m^*(T\cap \mathscr{C}E_n)\qquad (4)$$

因 $m^*(T\cap E_n)\geqslant m^*(T\cap E_{n+1}),m^*(T\cap \mathscr{C}E_n)\leqslant m^*(T\cap \mathscr{C}E_{n+1})$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，即数列 $\{m^*(T\cap E_n)\}$ 单调减少，而 $\{m^*(T\cap \mathscr{C}E_n)\}$ 单调增加，故它们的极限都存在，于是对式（4）两端取极限，并将式（1）、（3）代入，即得

$$\lim_{n\to\infty}m^*(T\cap E_n)=m^*T-\lim_{n\to\infty}m^*(T\cap \mathscr{C}E_n)$$

$$=m^*T-m^*(T\cap \mathscr{C}E)$$

$$=[m^*(T\cap E)+m^*(T\cap \mathscr{C}E)]-m^*(T\cap \mathscr{C}E)$$
$$=m^*(T\cap E)$$

定理10和定理11分别指出了“可测增集列”和“可测减集列”与其极限集的测度之间的联系．特别是，在定理10中取 $T=E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 时，则有 $mE=\lim_{n\to\infty} mE_n$；而在定理11中，当令 $mE_1<+\infty$，且取 $T=E_1$ 时，则有 $mE=\lim_{n\to\infty} mE_n$．这两种情形都是我们以后经常会遇到的，必须加以注意．另外，应当指出定理 11 中的条件（iii）$m^*T<+\infty$不能去掉．例如在 R^1 中，令$E_n=(n,+\infty)$，$n=1,2,\cdots$，取$T=(0,+\infty)$，则 $m^*T=+\infty$．显然 $\{E_n\}$ 是单调减少可测集列，且 $E=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=\phi$，从而 $m^*(T\cap E)=m^*\phi=0$；另一方面，对任一 n，恒有 $m^*(T\cap E_n)=+\infty$，于是有

$$m^*(T\cap E)=0\neq+\infty=\lim_{n\to\infty} m^*(T\cap E_n)$$

习　　题

1．若 $m^*E=0$，则 E 必可测，且$mE=0$．

2．如果 $mE=0$，则 E的任何子集E_1 也可测，且 $mE_1=0$．

3．设 E_1，E_2 都是可测集，试证：

$$mE_1+mE_2=m(E_1\cup E_2)+m(E_1\cap E_2)$$

4．设 $E_i\subseteq S_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，S_i 是互不相交的可测集，试证：

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m^*E_i$$

5．设 S_1，S_2 皆为可测集，且$S_2\subseteq S_1$，$mS_2<+\infty$，则

$$m(S_1 - S_2) = mS_1 - mS_2$$

6．设 $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots \supseteq E_n \supseteq \cdots$，且至少存在一个 k，使 E_k 有界，则

$$m_*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m_* E_n$$

§4 可测集的构造

在前一节中，我们给出了可测集概念，并讨论了可测集的一些性质。但到现在为止还不知道一般常见的点集中究竟有哪些是可测的？本节就来讨论这一问题。

定理 1 任何开长方体 I 都是可测集，并且 $mI = |I|$，即开长方体的测度就是它的体积。

证明 首先证 I 可测，为此，只须证明对任意点集 T，恒有

$$m^*T = m^*(T \cap I) + m^*(T \cap \mathscr{C} I)$$

1° 往证 $m^*T \leqslant m^*(T \cap I) + m^*(T \cap \mathscr{C} I)$

事实上，对任意点集 T，恒有

$$T = (T \cap I) \cup (T \cap \mathscr{C} I)$$

从而由外测度性质(Ⅲ)知

$$m^*T \leqslant m^*(T \cap I) + m^*(T \cap \mathscr{C} I)$$

2° 往证 $m^*T \geqslant m^*(T \cap I) + m^*(T \cap \mathscr{C} I)$。

设开长方体

$$I = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

令

$$I^{(k)} = \left\{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \,\middle|\, a_i + \frac{1}{k} < x_i < b_i\right.$$

$$-\frac{1}{k},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\Big\}$$

其中 $k=1,2,\cdots$。显然有 $I^{(k)}\subseteq I(k=1,\ 2,\ \cdots)$，且当 k 充分大时，$\rho(I^{(k)},\mathscr{C}I)>0$。因 $T\cap I^{(k)}\subseteq I^{(k)}$，$T\cap\mathscr{C}I\subseteq\mathscr{C}I$，所以有

$$\rho(T\cap I^{(k)},\ T\cap\mathscr{C}I)\geqslant\rho(I^{(k)},\mathscr{C}I)>0$$

于是由外测度性质(IV)，有

$$m^*[(T\cap I^{(k)})\cup(T\cap\mathscr{C}I)]$$
$$=m^*(T\cap I^{(k)})+m^*(T\cap\mathscr{C}I)$$

但 $T\supseteq T\cap(I^{(k)}\cup\mathscr{C}I)=(T\cap I^{(k)})\cup(T\cap\mathscr{C}I)$，故有

$$m^*T\geqslant m^*[T\cap(I^{(k)}\cup\mathscr{C}I)]$$
$$=m^*(T\cap I^{(k)})+m^*(T\cap\mathscr{C}I)\qquad(1)$$

于是只须证明 $\lim\limits_{k\to\infty}m^*(T\cap I^{(k)})=m^*(T\cap I)$，即得欲证的结果。

事实上，显然有 $m^*(I-I^{(k)})\to0$ （当 $k\to\infty$ 时），而 $T\cap I^{(k)}\subseteq T\cap I$，从而 $m^*(T\cap I^{(k)})\leqslant m^*(T\cap I)$，故有

$$0\leqslant m^*(T\cap I)-m^*(T\cap I^{(k)})\leqslant m^*[T\cap(I-I^{(k)})]$$
$$\leqslant m^*(I-I^{(k)})\to0\ (k\to\infty)$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}m^*(T\cap I^{(k)})=m^*(T\cap I)$。

将上式代入式（1）得

$$m^*T\geqslant m^*(T\cap I)+m^*(T\cap\mathscr{C}I)$$

综上证得 I 是可测集.

次证 $mI=|I|$。已知 I 可测，故只须证明 $m^*I=|I|$。此结果见§2之习题1。

综上定理证毕.

定理 2 任何开集都是可测集.

证明 已知开集$G=\phi$可测. 若开集 $G\neq\phi$，则由第二章§4

定理 8 知，G 可表为至多可列个开长方体的并集，即 $G=\bigcup_{n=1}^{m} I_n$ (m：有限或∞)，I_n 都是开长方体．于是由定理 1 知每个 I_n 都可测，从而由§3推论 3 知 G 是可测的．

推论 1 任何闭集都是可测集．

证明 设 F 是闭集，则 $\mathscr{C}F$ 是开集，由定理 2 知 $\mathscr{C}F$ 可测，而 $F=\mathscr{C}(\mathscr{C}F)$，故由§3定理 3 知 F 必可测．

推论 2 任何有限集都可测，且其测度为零．

证明 见本节习题 3．

推论 3 任何可列集都是可测的，且其测度为零．

证明 见本节习题 4．

定义 1 设 $F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots$ 是一列闭集，且 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，则称 F 为 F_σ 型集；

设 $G_1, G_2, \cdots, G_n, \cdots$ 是一列开集，且

$G=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$，则称 G 为 G_δ 型集．

显然 F_σ 型集未必是闭集，G_δ 型集未必是开集．

定义 2 凡以开集、闭集为对象，作有限次或可列次或并或交的运算，所得到的集统称之为**波雷尔集**．

显然 F_σ 型集和 G_δ 型集都是波雷尔集．这种集合对今后的讨论是很有用的．

定理 3 任何波雷尔集都是可测集．

证明 因开集和闭集都是可测集，且由§3关于可测集性质的讨论知，对可测集进行有限次或可列次并或交的运算的结果仍得到可测集，故由波雷尔集定义知，凡是波雷尔集都是可测

的。

推论 4 任何长方体 I 都可测，且 $mI=|I|$。

定理 4 任何可测集都可表为至多可列个互不相交的、具有有限测度的可测集的并。

证明 设 E 是可测集，现以 R^n 的原点 O 为中心，以自然数 n 为半径，作闭球列 $\{V_n(O)\}$，其中

$$V_n(O)=\{P\mid P\in R^n,\ \rho(P,\ O)\leqslant n\}\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

显然每个 $V_n(O)$ 都是闭集，故都可测，令

$$K_n=V_n(O)-V_{n-1}(O)$$

$(n=1,2,\cdots,\ V_0(O)=\phi)$，则 $K_i\cap K_j=\phi\quad(i\neq j)$，且 $R^n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n$。又因 $K_n=V_n(O)\cap\mathscr{C}(V_{n-1}(O))$，故每个 K_n 都是有界可测集。于是有

$$E=E\cap R^n=E\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap K_n)$$

且 $E\cap K_n$ 可测，$m\ (E\cap K_n)<+\infty$。令 $E_n=E\cap K_n$（可能有某些$E_n=\phi$），则 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，且 $mE_n<+\infty$，$E_i\cap E_j=\phi\ (i\neq j)$。

定理 4 指出了可测集的可分解性，也说明了可测集的结构。但此定理并未断言，对可测集的任意分解，它的分解集都必是可测的，此点应当注意。

定理 5 对任意点集E，恒有 G_δ 型集 G，使 $G\supseteq E$，且 $mG=m^*E$。

证明 对任意自然数 n，由外测度定义知，有一列开长方

体 $I_1^{(n)}$, $I_2^{(n)}$, …, $I^{(n)}_k$, …, 使$E\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I^{(n)}_k$, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|I_k^{(n)}\right|<m^*E+\frac{1}{n} \tag{1}$$

现令$G_n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I^{(n)}_k$ ($n=1, 2, \cdots$), 则 G_n 是开集, 故G_n可测, 且由式（1）有

$$mG_n\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left|I^{(n)}_k\right|\leqslant m^*E+\frac{1}{n}\quad (n=1, 2, \cdots)$$

再令 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, 则 G 是 G_δ 型集. 又因对每个 n, 皆有 $G_n\supseteq E$, 从而有 $G\supseteq E$, 于是有

$$m^*E\leqslant mG\leqslant m^*G_n< m^*E+\frac{1}{n}\quad (n=1,2,\cdots)$$

由$\frac{1}{n}>0$ 的任意性, 则有 $m^*E=mG$。

定理 6 设 E 是可测集, 则有 F_σ 型集 F, 使$F\subseteq E$, 且 $mF=mE$。

证明 当E有界时:

1° 因 E有界,故存在闭长方体$\varDelta$, 使$\varDelta\supseteq E$. 令$S=\varDelta-E$, 因 $\varDelta$ 和E都可测, 故 S 也可测. 从而由定理 5 知有 G_δ 型集G, 使 $G\supseteq S$, 且$mG=m^*S=mS$. 又因G为 G_δ 型集, 故 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, 其中 G_n ($n=1,2,\cdots$)是开集. 令

$$F=\varDelta\cap\mathscr{C}G,\quad F_n=\varDelta\cap\mathscr{C}G_n\ (n=1, 2,\cdots)$$

则 F_n ($n=1, 2, \cdots$) 都是闭集, 且有

$$F=\Delta\cap\mathscr{C}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\right)=\Delta\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}G_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\Delta\cap\mathscr{C}G_n)$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$$

故F是 F_σ 型集。

2° 往证 $F\subseteq E$。事实上，因为 $F=\Delta\cap\mathscr{C}G$，从而 $F\subset\Delta$，于是有$F\cap\mathscr{C}\Delta=\phi$；又因$F\subseteq\mathscr{C}G$，且 $G\supseteq S$，故有$F\cap S=\phi$，于是$F\subseteq\mathscr{C}S$。但 $S=\Delta-E=\Delta\cap\mathscr{C}E$，于是有

$$F\subseteq\mathscr{C}S=\mathscr{C}(\Delta\cap\mathscr{C}E)=\mathscr{C}\Delta\cup E$$

注意到 $F\cap\mathscr{C}\Delta=\phi$，故 $F\subseteq E$。

3° 往证$mF=mE$。由 2° 知 $F\subseteq E$，从而 $mF\leqslant mE$。另一方面，因 $F=\Delta\cap\mathscr{C}G=\Delta-G$，所以$\Delta\subseteq F\cup G$，故有

$$m\Delta\leqslant mF+mG$$

从而

$$mF\geqslant m\Delta-mG$$

注意到1°中的 $mG=mS$，且$mS=m(\Delta-E)$，于是有

$$mF\geqslant m\Delta-mS=m\Delta-m(\Delta-E) \qquad (1)$$

又因 $\Delta\supseteq E$，$\Delta=(\Delta-E)\cup E$，而 $(\Delta-E)\cap E=\phi$，故有

$$m\Delta=m(\Delta-E)+mE$$

将上式代入式（1）便得

$$mF\geqslant m(\Delta-E)+mE-m(\Delta-E)=mE$$

综上得证 $mF=mE$。

当E无界时：

若E无界，则由定理 4 知，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，其中 $E_i\cap E_j=\phi$ $(i\neq j)$，$mE_n<+\infty$ $(n=1,2,\cdots)$，且由§3 定理 8（测度完全

可加性）知，$mE=\sum_{n=1}^{\infty}mE_n$。

因对每个 n，E_n 是有界可测集，故由前面的证明知，必有 F_σ 型集 F_n，使 $F_n\subseteq E_n$，且 $mF_n=mE_n$。令

$$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$$

则因每个 F_n 是可列个闭集的并，故 F 仍是可列个闭集的并，从而 F 是 F_σ 型集，且显然有

$$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E$$

又因 $E_i\cap E_j=\phi$ $(i\neq j)$，故有 $F_i\cap F_j=\phi$ $(i\neq j)$，于是由§3定理 8 得

$$mF=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}mF_n=\sum_{n=1}^{\infty}mE_n=mE$$

定理 7　任何可测集必是一个波雷尔集与一个测度为零的可测集的并集，同时也必是一个波雷尔集与一个测度为零的可测集的差集。

证明　设 E 是可测集，由定理 5 和定理 6 知，分别有 G_δ 型集 G 和 F_σ 型集 F，使

$$G\supseteq E\supseteq F,\text{ 且 } mG=mE=mF$$

令 $N_1=E-F$，$N_2=G-E$，因为 N_1、N_2 都是可测集的差集，所以由§3定理 6 知 N_1、N_2 都是可测集，且 $N_1\cap F=\phi$，$N_2\cap E=\phi$，于是有

$$E=N_1\cup F,\quad G=N_2\cup E\text{ 或 }E=G-N_2,$$

且

$$mE=mN_1+mF,\quad mG=mN_2+mE$$

从而有

$$mN_1 = mE - mF = 0,\quad mN_2 = mG - mE = 0$$

定理3告诉我们凡是波雷尔集都是可测的，但也确实存在不是波雷尔集的可测集，所以可测集族和波雷尔集族并不完全一样，前者是真包含了后者的，即后者为前者的真子族。另外，定理7告诉我们，任意可测集必是一个波雷尔集和一个测度为零的集合的并集。可测集族就是包含全体波雷尔集和全体测度为零的集的集族，而且这个集族中的任何两个集合的并集显然仍在这个集族中，具有这种性质的集族，我们称之为"可加"集族。

定理8 集E可测的充分必要条件是对于任意$\varepsilon>0$，恒有开集$G\supseteq E$，使

$$m^*(G-E)<\varepsilon$$

证明 必要性 因E可测，则由定理4知，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，其中$E_n$都可测，且有$mE_n<+\infty$，$E_i\cap E_j=\phi$ $(i\neq j)$。

对任意$\varepsilon>0$和每个n，由定理5的证明知，相应地有开集$G_n\supseteq E_n$，使

$$mG_n<mE_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

令$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$，则$G$是开集，且显然$G\supseteq E$。又因

$$G-E=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right)-\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right)\cap\mathscr{C}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)$$

$$=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right)\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}E_n\right)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n\cap\mathscr{C}E_n)$$

于是有

$$m^*(G-E)=m\ (G-E)\leqslant m\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(G_n\cap\mathscr{C}E_n\right)\right]\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m\left(G_n\cap\mathscr{C}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(G_n-E_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(mG_n-mE_n\right)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$$

充分性　由条件知，对任意自然数 n，有开集 $G_n\supseteq E$，使

$$m^*(G_n-E)<\frac{1}{n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

令 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ 则 $G\supseteq E$，且 G 为 G_δ 型集，故可测．特别有

$$0\leqslant m^*(G-E)\leqslant m^*(G_n-E)<\frac{1}{n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

由 $\frac{1}{n}>0$ 的任意性，得 $m^*(G-E)=0$，从而 $G-E$ 是可测集．

又因 $G\supseteq E$，故有

$$E=G-(G-E)$$

从而 E 是可测集．

定理 9　集 E 可测的充分必要条件是对任意 $\varepsilon>0$，恒有闭集 $F\subseteq E$，使

$$m^*(E-F)<\varepsilon.$$

证明　必要性　因 E 可测，故 $\mathscr{C}E$ 也可测．于是由定理 8 知，对任意 $\varepsilon>0$，有开集 $G\supseteq\mathscr{C}E$，使

$$m^*(G-\mathscr{C}E)<\varepsilon$$

令 $F=\mathscr{C}G$，则 F 是闭集，且因 $G\supseteq\mathscr{C}E$，故有 $E\supseteq\mathscr{C}G=F$.

又因为

$$G-\mathscr{C}E=G\cap\mathscr{C}(\mathscr{C}E)=E\cap\mathscr{C}(\mathscr{C}G)=E-\mathscr{C}G=E-F$$

所以

$$m^*(E-F)=m^*(G-\mathscr{C}E)<\varepsilon.$$

充分性　由条件知，对任意 $\varepsilon>0$，相应地有闭集 $F\subseteq E$，使

$$m^*(E-F)<\varepsilon$$

因 F 是闭集，故 $\mathscr{C}F$ 是开集，且有 $\mathscr{C}F\supseteq\mathscr{C}E$. 但是

$$E-F=E\cap\mathscr{C}F=\mathscr{C}F\cap\mathscr{C}(\mathscr{C}E)=\mathscr{C}F-\mathscr{C}E$$

于是有

$$m^*(\mathscr{C}F-\mathscr{C}E)=m^*(E-F)<\varepsilon$$

即对任意 $\varepsilon>0$，相应地有开集 $\mathscr{C}F\supseteq\mathscr{C}E$，使

$$m^*(\mathscr{C}F-\mathscr{C}E)<\varepsilon$$

于是由定理 8 知 $\mathscr{C}E$ 可测，再由 §3定理 3 便知 E 是可测集.

推论 5　集 E 可测的充分必要条件是对任意 $\varepsilon>0$，相应地存在开集 G 和闭集 F，使 $G\supseteq E\supseteq F$，且 $m^*(G-F)<\varepsilon$.

证明　留给读者.

习　　题

1. 设 E 是非空可测集，是否必有 $mE>0$?
2. 无界可测集是否必有正测度?
3. 试证推论2.
4. 试证推论3.
5. 设 E 是任意非空点集，且 $E'=\phi$，则 E 必可测，且 $mE=0$.
6. 设 E 是无界可测集，问是否必有 $mE=+\infty$?
7. 试证推理5.
8. 在[0, 1]上作一完备集 E，使 E 的测度 $mE=\frac{2}{3}$，且 E 不含任

何开区间.

9. 证明实直线上的所有可测集作成的集类M的基数等于实直线的所有子集的集类N的基数.

§5 乘积空间中点集的测度

定义1 设 A, B 是二点集，则称由 $x\in A$, $y\in B$ 作成的所有点对 (x,y) 的集合：

$$A\times B=\{(x,y)|\ x\in A,\ y\in B\}$$

为 A 和 B 的笛卡尔(Cartesian) 乘积. 并称 $A\times B$ 的元素 (x,y)中在前面的点 x 为(x,y)的第一坐标，后面的y 为(x,y)的第二坐标.

注意，$(s,t)\in A\times B$ 的充要条件是 $s\in A$, $t\in B$. 点对(s,t)中的 s 和 t 的前后位置一般是不能颠倒的(除非$A=B$). 比如，若 $A\cap B=\phi$, $s\in A$, $t\in B$, 则 $(s,t)\in A\times B$, 而 $(s,t)\notin B\times A$. 但 $(t,s)\in B\times A$, 而 $(t,s)\notin A\times B$.

例1 设 R^1 中两个开区间为 $A=(-1,1)$, $B=(0,1)$, 则 $A\times B$ 就是平面 R^2 中的开矩形 C: $-1<x<1, 0<y<1$.

设 $C=\{(x,y)|\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$ 是 R^2 中的开单位正方形，$D=(0,1)$是 R^1 中开单位区间，则 $C\times D$ 是 R^3 中开正方体 E:$0<x<1$, $0<y<1$, $0<z<1$.

如果A是P维空间 R^p 中的点集，B是 q 维空间 R^q 中的点集，则 $A\times B$ 就是 $p+q$ 维空间 R^{p+q} 中的点集.

根据前几节的讨论，不论是在 R^p, R^q 或 R^{p+q} 中，我们都已定义了什么叫可测集. 因此人们自然会想到一个问题，即 R^p 和 R^q 中的可测集和 R^{p+q} 中的可测集之间究竟有什么样的关系？为此，基于我们的需要给出下面一些结果.

定理1 设 $A\subseteq R^p$，$B\subseteq R^q$ 都是可测集，则 $C=A\times B$ 是 $R^{p+q}=R^p\times R^q$ 中的可测集，且 $mC=mA\times mB$。

证明 当 A，B 都是有界可测集时：

1° 设A和B都是长方体，则 $A\times B$ 就是 R^{p+q} 中的长方体，故由§4推论4知 $A\times B$ 可测，且有

$$m(A\times B)=|A\times B|=|A|\times|B|=mA\times mB.$$

2° 设 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，$B=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$，$A_i\cap A_j=\phi$，$B_i\cap B_j=\phi$

$(i\neq j)$，其中 A_i，B_i 都是长方体，则

$$A\times B=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\times\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)=\bigcup_{i,j=1}^{\infty}(A_i\times B_j)$$

$$=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_i\times B_j)$$

因为A_i,B_i都是长方体，故长方体$A_i\times B_j$都可测，从而 $A\times B$ 可测，又因 $\{A_i\}$ 两两不交，$\{B_j\}$ 两两不交，所以$\{A_i\times B_j\}$也两两不交(图3—4)于是由§3定理8（测度完全可加性）及1°有

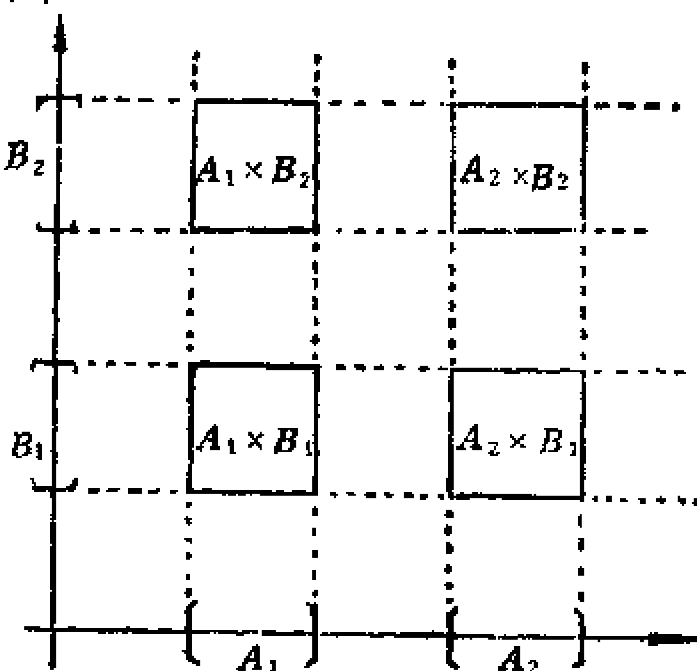


图3—4

$$m(A\times B)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}m(A_i\times B_j)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(mA_i\times mB_j)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{\infty} mA_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{\infty} mB_i\right)=m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\times m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

$$=mA\times mB$$

由2°知，当A和B是开集时，定理成立（参看第二章§4定理7）.

3° 设 A、B 是二有界的 G_δ 型集，则 A, B 可表为

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,\quad B=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^*$$

其中 G_n, G^*_n ($n=1,2,\cdots$) 皆为有界开集，且可要求

$$G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\supseteq G_n\supseteq\cdots,\quad G_1^*\supseteq G_2^*\supseteq\cdots\supseteq G_n^*\supseteq\cdots$$

于是有

$$G_1\times G^*_1\supseteq G_2\times G^*_2\supseteq\cdots\supseteq G_n\times G^*_n\supseteq\cdots$$

$$A\times B=\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n\times G_n^*)=\lim_{n\to\infty}(G_n\times G_n^*)$$

从而由2°可知$G_n\times G_n^*$ 都可测，且 $m(G_n\times G_n^*)=mG_n\times mG_n^*$；再由§3定理9及定理11知，$A\times B$ 可测，且有

$$m(A\times B)=\lim_{n\to\infty} m(G_n\times G_n^*)=\lim_{n\to\infty}(mG_n\times mG_n^*)$$

$$=\lim_{n\to\infty} m\ G_n\times\lim_{n\to\infty} mG_n^*=mA\times mB$$

4° 设 mA, mB 中至少有一个为零，则定理成立.

不妨设 $mA=0$，于是对任意 $\varepsilon>0$，考虑到外测度定义，或从§4定理5的证明过程中可知，有开集 $G\supseteq A$和开集 $G^*\supseteq B$，使

$$mG<mA+\varepsilon=\varepsilon,\quad mG^*<mB+1$$

于是由2°知 $G\times G^*$ 可测，且 $m(G\times G^*)=mG\times mG^*$。从而

$$m^*(A\times B)\leqslant m^*(G\times G^*)=m(G\times G^*)=mG\times mG^*$$
$$<\varepsilon(mB+1)$$

由于 $\varepsilon>0$ 的任意性有 $m^*(A\times B)=0$，故 $A\times B$ 可测，且有 $m(A\times B)=0=mA\times mB$。

5° 设A,B 是一般有界可测集，由§4定理5知，有G_δ 型集 A^* 和 B^*，使

$$A^*\supseteq A,\quad B^*\supseteq B,\text{且}\quad mA^*=mA,\quad mB^*=mB$$

因为

$$A^*=(A^*-A)\cup A,\quad (A^*-A)\cap A=\phi$$
$$B^*=(B^*-B)\cup B,\quad (B^*-B)\cap B=\phi$$

所以有

$$m(A^*-A)=mA^*-mA=0,\quad m(B^*-B)=mB^*-mB=0$$

又因

$$A^*\times B^*=[(A^*-A)\cup A]\times[(B^*-B)\cup B]$$
$$=[(A^*-A)\times(B^*-B)]\cup[A\times(B^*-B)]$$
$$\cup[(A^*-A)\times B]\cup[A\times B]$$

故由4°知，$(A^*-A)\times(B^*-B)$，$A\times(B^*-B)$，$(A^*-A)\times B$ 都可测，且由3°知 $A^*\times B^*$ 可测，于是 $A\times B$ 可测，且有

$$m(A^*\times B^*)=m(A^*-A)\times m(B^*-B)+mA\times m(B^*-B)$$
$$+m(A^*-A)\times mB+m(A\times B)=m(A\times B).$$

另一方面，$m(A^*\times B^*)=mA^*\times mB^*=mA\times mB$，于是

$$m(A\times B)=mA\times mB$$

综上得证当 A、B 皆有界时，定理成立。

当 A,B 是无界可测集时：由§4定理4知

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,\quad B=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j$$

其中$\{A_i\}$，$\{B_j\}$分别是两两不交的有界可测集列．于是

$$A\times B=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\times\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_i\times B_j)$$

因为 $A_i\times B_j$ 皆可测，且 $m(A_i\times B_j)=mA_i\times mB_j$，所以 $A\times B$ 也可测，且有

$$m(A\times B)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}m(A_i\times B_j)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(mA_i\times mB_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}mA_i\times\sum_{j=1}^{\infty}mB_j=m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\times m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)$$

$$=mA\times mB$$

于是定理全部证毕．

定理1告诉我们，R^p 中的可测集A与 R^q 中的可测集 B 的乘积 $A\times B$ 是乘积空间 R^{p+q} 中的可测集，并且它的测度 $m(A\times B)$就等于 A，B 的测度 mA和mB 的乘积 $mA\times mB$．这就给乘积空间中可测集的运算创造了相当方便的条件．

定义2 设 (i) $S(P)$ 是关于集E上点P的一个命题；

(ii) $N\subseteq E$，且 $mN=0$．

若命题 $S(P)$ 在 $E-N$ 上处处成立，则称命题 $S(P)$ 在E上**几乎处处成立**．记作“$S(P)$ P.P. 于E”．

例2 设 $D(x)$是$(0,1)$上的迪里赫莱函数，则 $D(x)=0$ P.P. 于$(0,1)$．因为在$(0,1)$上

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\ \text{为有理点}\\ 0, & x\ \text{为无理点}\end{cases}$$

而$(0,1)$中的有理点集是可列的，故其测度为0．

例 3 设 F 是康托集，其特征函数为

$$\Phi(x)=\begin{cases}1, & x\in F\\ 0, & x\notin F\end{cases}$$

则 $\Phi(x)=0$ $P\cdot P\cdot$ 于$[0,1]$。因由§1例 3 知 $mF=0$。

例 4 设 $f(x)$是 R^1 上的单调增加函数，则 $f(x)$ 在 R^1 上是几乎处处连续的。因为 R^1 上单调增加函数的不连续点集是至多可列的，故不连续点集可测，且测度为 0 。

定义 3 设 $E\subseteq R^p\times R^q$，$x_0\in R^p$，则称点集

$$E_{x_0}=\{y|\ (x_0,\ y)\in E\}$$

为以超平面 $x=x_0$ 截 E 的截面。

由定义可知，$E_{x_0}\subseteq R^q$，且当 $E=A\times B$，$x_0\notin A$ 时，显然有 $E_{x_0}=\phi$。

例 5 设

$$E=\{(x,y)|\ -1<x<1,1<y<2\}\subseteq R^1\times R^1,\quad x_0=\frac{1}{2}\in R^1$$

则

$$E_{\frac{1}{2}}=\{y\ |\ (\frac{1}{2},\ y)\in E\}=\{y|\ 1<y<2\}=(1,2)\subseteq R^1$$ （图 3—5）

若 $x_0=2$，则显然 $E_2=\phi$。

例 6 设 $R^1\times R^2$ 的子集 $E=\{(x,(y,z))|\ 0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<z<1\}$，$x_0=a$，$0<a<1$，则 E_{x_0} 是以平面 $x=a$ 截 E 的开正方形

$$M=\{(y,z)|\ 0<y<1,\ 0<z<1\}\subseteq R^2$$ （图 3—6）

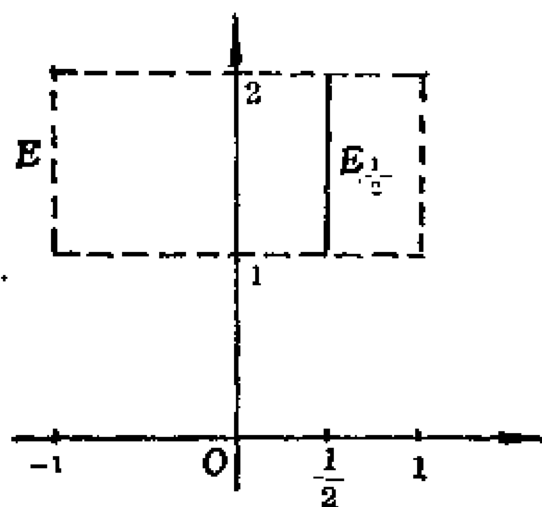


图3—5

如取 $P_0=(y_0,z_0)\in R^2$，$0<y_0<1, 0<z_0<1$，则E_{P_0}是R^1中的开区间 $\Delta=\{x|(x,(y_0, z_0))\in E\}$。

定理 2 设$E\in R^p\times R^q$，且$mE=0$，则

$$mE_x=0, P\cdot P\cdot \text{于} R^p$$

即有集$N\subseteq R^p$，$mN=0$，使对一切 $x\in R^p-N$，恒有 $mE_x=0$。

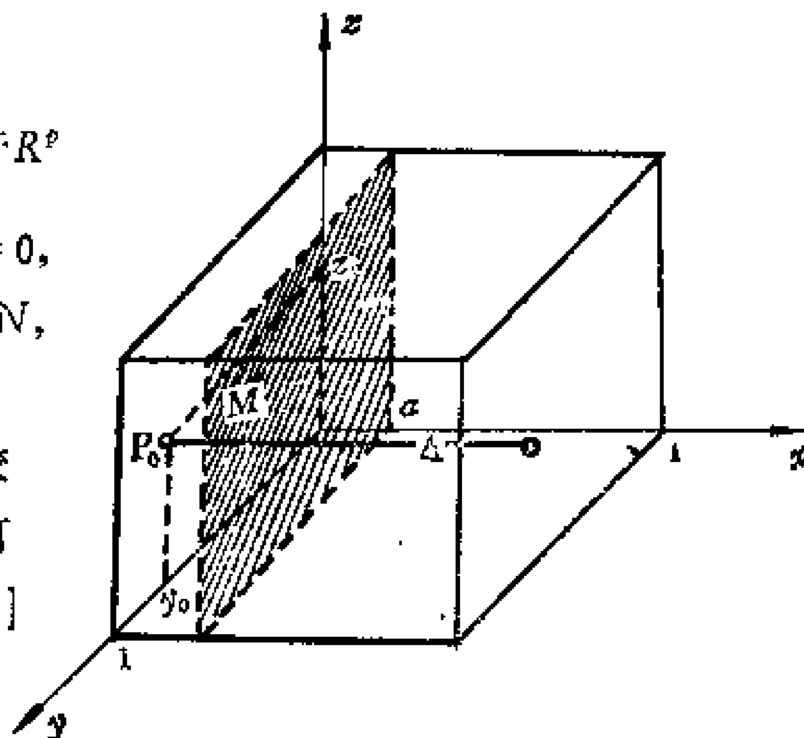


图3—6

证明 证明比较冗繁，故略去，读者可参看主要参考文献[1]

定理 3 如果 $E\subseteq R^p\times R^q$ 是可测集，则集 E_x 可测 $P\cdot P\cdot$ 于R^p。即存在集 $N\subseteq R^p$，$mN=0$，使得对一切$x\in R^p-N$，恒有E_x可测。

证明 类似于定理 1 的证明，我们也分五步证之：

1° 设$R^p\times R^q$的子集E是长方体$\Delta=\Delta_1\times\Delta_2$，显然当 $x\in\Delta_1$ 时，有 $E_x=\Delta_2$，当 $x\notin\Delta_1$ 时，有 $E_x=\phi$，故E_x

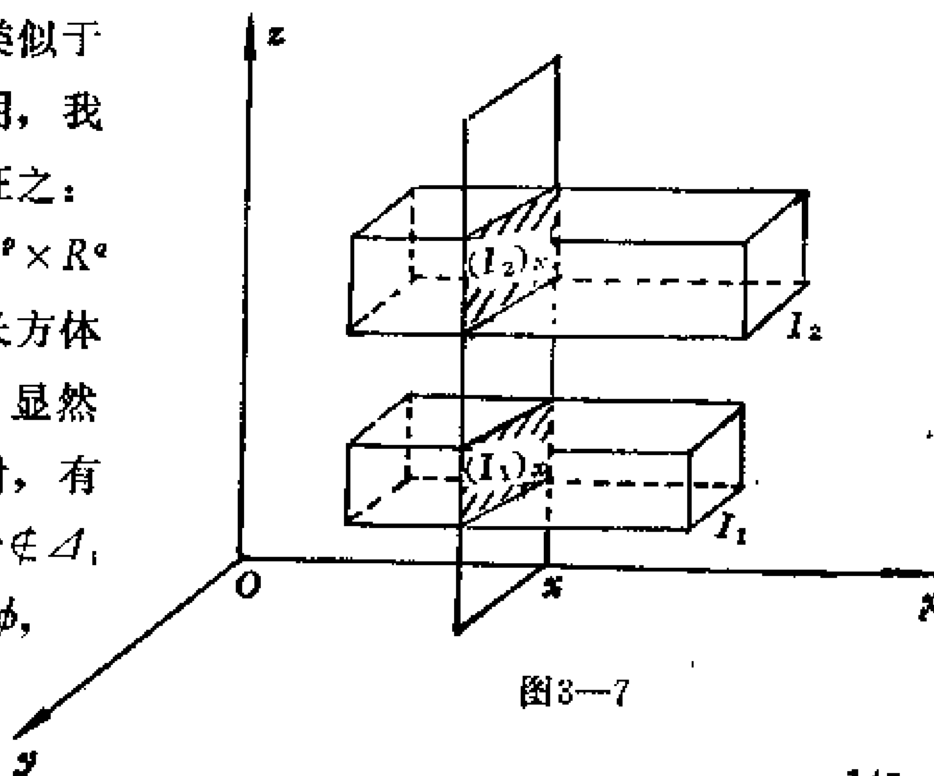


图3—7

总是可测集。

2° 设 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subseteq R^p \times R^q$，$I_i$ 是 $R^p \times R^q$ 中的长方体，即 $I_i=\Delta^{(1)}_i \times \Delta^{(2)}_i$，$\Delta^{(1)}_i$、$\Delta^{(2)}_i$ 分别是 R^p、R^q 中的长方体，且 $I_i \cap I_j=\phi$ $(i\neq j)$ （图3－7），则对任意 $x\in R^p$，显然有

$$E_x=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right)_x=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(I_i\right)_x$$

由1°知 $(I_i)_x$ 皆可测，故 E_x 是 R^q 中可测集。

由第二章§4定理7且结合2°可知，若E 是开集时，E_x 是可测的。

3° 设 $R^p \times R^q$ 的子集 E 是 G_δ 型集，即 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$，$G_n$ 皆是开集，则

$$E_x=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)_x=\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n)_x$$

由2°知 $(G_n)_x$ 都可测，从而由§3定理9知 E_x 可测。

4° 设 $E\subseteq R^p \times R^q$，且 $mE=0$，则由定理2知

$mE_x=0$ $P \cdot P \cdot$于 R^p

5° 设E是 $R^p \times R^q$ 中一般的可测集，则由§4定理5知，有 G_δ 型集 $G\supseteq E$，使 $mG=mE$。又因 $G=(G-E)\cup E$，$(G-E)\cap E=\phi$，所以

$$m(G-E)=mG-mE=0$$

且

$$G_x=(G-E)_x\cup E_x,\quad 或\quad E_x=G_x-(G-E)_x$$

由3°知 G_x 可测，且由4°知

$$m(G-E)_x=0 \quad P.P. \ 于 \ R^p$$

从而 $(G-E)_x$ 对于 R^p 几乎处处可测，于是 E_x 对于 R^p 也几乎处处可测。

综上定理3证毕。

习　　题

1．$A\times B=\phi$ 的充分必要条件是 $A=\phi$ 或 $B=\phi$。

2．设 $E_1=A_1\times B_1$，$E_2=A_2\times B_2$ 都是非空集，则 $E_1\subseteq E_2$ 的充分必要条件是 $A_1\subseteq A_2$，$B_1\subseteq B_2$。

3．设 $A_1\times B_1=A_2\times B_2$ 是非空的，则必有 $A_1=A_2$，$B_1=B_2$。

第四章　可测函数

函数是分析学研究的主要对象，为了以后建立新的积分理论的需要，我们要对定义在可测集合 E 上的实变函数进行一些讨论．为此，先给出一般点集上函数的某些概念和性质，并在此基础上讨论可测函数问题．

§1　定义在 $\mathbf{R}^n$ 中点集上的函数

大家熟知，在数学分析中，我们研究的函数基本是定义在 R^1 的区间或 R^n 中长方体上的．但在本门课中，我们要讨论的是 R^n 中一般点集上的函数．为此，我们先把数学分析中所讨论的函数的定义域扩充为 R^n 中的任意点集上去．

在第一章§2的定义 1 中，已给出了一般集合上的映射概念，设

$$f: A \to B,\quad a \longmapsto f(a) = b$$

是从 A 到 B 的一个映射．当象（值）域 B 是数集时，则称 f 为 A 上的函数．所以函数是一种特殊的映射．以后我们总在 R^n 中讨论函数，即所讨论的函数的原象域(定义域)是 R^n 中的点集，而值域为实数集的子集，且有时函数可取 $-\infty$，$+\infty$ 为其值*[1]．

*[1] 规定，$0(\pm\infty) = (\pm\infty)0 = 0$，但记号 $\pm\infty - (\pm\infty)$，$\pm\infty + (\mp\infty)$，$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$，$\dfrac{a}{0}$ 皆无意义．

定义 1 设 $E\subseteq R^n$，f 是 E 上函数，$a\in E$。若对任意 $\varepsilon>0$，存在相应的 $\delta>0$，当 $x\in E\cap N(a,\delta)$ 时，恒有

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

则称 E 上函数 f 在点 a 处连续。

若 E 上函数 f，在 E 的任意点处皆连续，则称 f 在 E 上连续。

定义 2 设 $E\subseteq R^n$，f 是 E 上函数，若对任意 $\varepsilon>0$，存在相应的 $\delta>0$，使对任意 $x_1\ x_2\in E$，只要 $\rho(x_1,\ x_2)<\delta$，恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \qquad (1)$$

则称 f 为 E 上一致连续函数。

点集 E 上的连续函数 f 显然未必在 E 上一致连续，但当对 f 的定义域 E 加以适当限制时，我们即可得到和数学分析中完全类似的一个结果。

定理 1 R^n 中有界闭集 E 上的连续函数 f 是一致连续的。

证明 由函数的一致连续定义可知，证此定理的关键在于，对任意 $\varepsilon>0$，找出相应的使定义 2 式（1）成立的公共数 $\delta>0$。为求此公共数 $\delta>0$，不难想到应利用 $f(x)$ 的连续性和第二章§3的定理 3（紧致性定理）。

1° 因为 f 在 E 上连续，所以对任意 $\varepsilon>0$，对 E 的每一点 a，有相应的 $\delta_a>0$，使当 $x\in E\cap N(a\ \delta_a)$ 时，恒有

$$|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对每点 $a\in E$，取邻域 $N\left(a,\frac{\delta_a}{2}\right)$，则 $\left\{N\left(a,\frac{\delta_a}{2}\right)\right\}_{a\in E}$ 作成 E 的一个覆盖。

因 E 是有界闭集，故由第二章§3定理 3 知，$\left\{N\left(a,\frac{\delta_a}{2}\right)\right\}_{a\in E}$

中必有有限个：

$$N\left(a_1,\ \frac{\delta_{a_1}}{2}\right),\ N\left(a_2,\ \frac{\delta_{a_2}}{2}\right),\ \cdots,\ N\left(a_k,\ \frac{\delta_{a_k}}{2}\right)$$

也覆盖了E．令

$$\delta=\min\left\{\frac{\delta_{a_1}}{2},\frac{\delta_{a_2}}{2},\cdots,\frac{\delta_{a_k}}{2}\right\}$$

则 $\delta>0$.

2° 现证1°中的 $\delta>0$ 即为所求.

实际上，对任意 $x_1,x_2\in E,\rho(x_1,x_2)<\delta$，因 $\left\{N\left(a_i,\ \frac{\delta_{a_i}}{2}\right)\right\}$ $(i=1,2,\cdots,K)$是E的覆盖，故必有 j，使

$$x_1\in N\left(a_j,\ \frac{\delta_{a_j}}{2}\right),\quad 即\quad \rho(a_j,x_1)<\frac{\delta_{a_j}}{2}<\delta_{a_j}$$

从而由 δ_a 的取法知，必有

$$|f(x_1)-f(a_j)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又由 δ 的取法及 $\rho(x_1,\ x_2)<\delta$，有

$$\rho(a_j,x_2)\leqslant\rho(a_j,x_1)+\rho(x_1,x_2)<\frac{\delta_{a_j}}{2}+\delta\leqslant\delta_{a_j}$$

仍由 δ_a 的取法知

$$|f(x_2)-f(a_j)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

从而有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(a_j)|+|f(a_j)-f(x_2)|<$$

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

综上得证 f 在E上一致连续.

定义 3 设 $E\subseteq R^n,\{f_n\}$ 是定义在E 上的函数列，若存在E上函数 f，使对任一 $x\in E$，皆有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

则称函数列$\{f_n\}$在E上收敛．且称f为$\{f_n\}$的极限函数．

特别地，若对任意$\varepsilon>0$，存在n_ε，使当$n\geq n_\varepsilon$时，对一切$x\in E$，皆有

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

则称$\{f_n\}$在E上一致收敛．且称f为$\{f_n\}$的一致收敛极限函数，在不致发生误解时也简称f为极限函数．

定理 2　对E上连续函数列$\{f_n\}$，若它在E上一致收敛，则其极限函数f也在E上连续；且当$\{f_n\}$的每个f_n在E上都一致连续时，则其极限函数f也在E上一致连续．

证明　1°　往证E上连续函数列$\{f_n\}$的一致收敛极限函数f也在E上连续．

事实上，由一致收敛定义知，对任意$\varepsilon>0$，存在n_ε，对一切$x\in E$，都有

$$|f_{n_\varepsilon}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

因f_{n_ε}在E上连续，故对任一$a\in E$，对上述的$\varepsilon>0$，有相应的$\delta>0$，使当$x\in E$且$\rho(x,a)<\delta$时，有

$$|f_{n_\varepsilon}(a)-f_{n_\varepsilon}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是，当$x\in E$且$\rho(x,a)<\delta$（即$x\in E\cap N(a,\delta)$）时，有

$$|f(a)-f(x)|\leq|f(a)-f_{n_\varepsilon}(a)|+|f_{n_\varepsilon}(a)-f_{n_\varepsilon}(x)|$$

$$+|f_{n_\varepsilon}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

得证f在E上连续．

2°　类似可证，若$\{f_n\}$的每个f_n都一致连续，则f也一致连续．

定义 4 设 $E\subseteq R^n$，E上函数列 $\{f_n\}$，若对任意$x\in E$，皆有

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$$

则称 $\{f_n\}$ 为**单调增加列**. 若上式中等号皆不成立时，则称 $\{f_n\}$ 为**严格增加列**.

若对任意 $x\in E$，皆有

$$f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\cdots\geqslant f_n(x)\geqslant\cdots$$

则称 $\{f_n\}$ 为**单调减少列**. 若上式中等号皆不成立时，则称 $\{f_n\}$ 为**严格减少列**.

单调（严格）增加列及单调（严格）减少列统称之为单调列.

定义 5 $E\subseteq R^n$，E 上函数 f，若对任意 $x\in E$，皆有

$$|f(x)|<\infty$$

则称 $f(x)$为E上**有限函数**.

定义 6 $E\subseteq R^n$，E上函数 f，若存在实数 a，对任意 $x\in E$，皆有

$$f(x)\leqslant a$$

则称 f 在E**上有上界**.

若存在实数 b，对任意 $x\in E$，皆有

$$f(x)\geqslant b$$

则称 f 在E**上有下界**.

若 f 在E上既有上界又有下界，则称 f 在E上**有界**.

例如$(0,1)$上的函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$是$(0,1)$上有限函数，但不是有界函数。显然有界函数必是有限函数.

为了今后讨论问题的需要，我们把数列的极限，函数在一点的极限以及函数列的极限函数等概念予以推广（在这里上、

下确界和极限值皆可取∞），且借助上、下极限定义给出这些概念。

定义 7　设 $\{a_n\}$ 是一数列，令

$$b_m=\sup_{n\geq m}\{a_n\}$$

显然有

$$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_m\geqslant\cdots$$

则称

$$C=\inf_m\ \{b_m\}=\inf_m\ \sup_{n\geq m}\{a_n\}=\lim_{m\to\infty}\ \sup_k\{a_{m+k}\}$$

为 $\{a_n\}$ 的**上极限**，记作

$$C=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n$$

类似地，令

$$b'_m=\inf_{n\geq m}\{a_n\}$$

显然有

$$b'_1\leqslant b'_2\leqslant\cdots\leqslant b'_m\leqslant\cdots$$

则称

$$C'=\sup_m\{b'_m\}=\sup_m\inf_{n\geq m}\{a_n\}=\lim_{m\to\infty}\inf_k\{a_{m+k}\}$$

为 $\{a_n\}$ 的**下极限**。记作

$$C'=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$$

当 $\{a_n\}$ 的上、下极限一致，即

$$a=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$$

时，则称 $\{a_n\}$ **收敛**，其共同值 a 称为 $\{a_n\}$ 的**极限值**，记作

$$\lim_{n\to\infty}\ a_n=a$$

容易验证，当 $\{a_n\}$ 有界时，这里给出的收敛概念与数学分

析中的定义是一致的，且其极限值亦相同．一般的，一个数列未必收敛，但是它的上、下极限总是存在的．

定义 8 设 f 是点集 E 上函数，a 为 E 的聚点（a 可能不属于 E），对于 a 的任意邻域 $N(a,\delta)$，

$$\sup_{\substack{x\in N(a,\delta)\cap E\\ x\neq a}}\{f(x)\} \tag{1}$$

必存在．由于对每个邻域 $N(a,\delta)$ 由式（1）皆确定一个数（可为∞），而 $N(a,\delta)$ 可以任意取，所以对点 a 可得到一个实数集（可能包括∞）M_a，即

$$M_a=\left\{\sup_{\substack{x\in N(a,\delta)\cap E\\ x\neq a}}\{f(x)\}\ \middle|\ \delta>0\right\}$$

则称此实数集 M_a 的下确界，即

$$\inf_{\delta>0}M_a=\inf_{\delta>0}\left\{\sup_{\substack{x\in N(a,\delta)\cap E\\ x\neq a}}\{f(x)\}\right\}$$

为 f 在点 a 处的**上极限**．记作

$$\overline{\lim_{x\to a}}{}_E\, f(x) \quad 或 \quad \overline{\lim_{x\to a}}\, f(x)$$

即

$$\overline{\lim_{x\to a}}\, f(x)=\inf_{\delta>0}\left\{\sup_{\substack{x\in N(a,\delta)\cap E\\ x\neq a}}\{f(x)\}\right\}$$

类似地，可定义 f 在点 a 处的**下极限**，记作

$$\underline{\lim_{x\to a}}{}_E\, f(x) \quad 或 \quad \underline{\lim_{x\to a}}\, f(x)$$

即

$$\underline{\lim_{x\to a}}\, f(x)=\sup_{\delta>0}\left\{\inf_{\substack{x\in N(a,\delta)\cap E\\ x\neq a}}\{f(x)\}\right\}$$

特别地，当

$$\overline{\lim_{x \to a}} f(x) = \underline{\lim_{x \to a}} f(x)$$

时，则称 f 在点 a 处有极限，且称值 $\overline{\lim_{x \to a}} f(x) \left(\underline{\lim_{x \to a}} f(x) \right)$ 为 f 在点 a 处的极限值，记作

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

即

$$\lim_{x \to a} f(x) = \overline{\lim_{x \to a}} f(x) = \underline{\lim_{x \to a}} f(x)$$

容易看出上述函数在一点处存在极限的定义，是数学分析中函数在一点处存在极限概念的推广。

定义 9 $E \subseteq R^n$，$\{f_n(x)\}$ 是 E 上函数列，则称 E 上函数

$$\overline{f}(x) = \overline{\lim_{n \to \infty}} f_n(x) = \inf_m \sup_{n \geq m} \{f_n(x)\}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \sup_k \{f_{m+k}(x)\} \quad (x \in E)$$

为 $\{f_n(x)\}$ 的上极限函数。

称 E 上函数

$$\underline{f}(x) = \underline{\lim_{n \to \infty}} f_n(x) = \sup_m \inf_{n \geq m} \{f_n(x)\}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \inf_k \{f_{m+k}(x)\} \quad (x \in E)$$

为 $\{f_n(x)\}$ 的下极限函数。

关于 E 上函数列 $\{f_n(x)\}$，若对任意 $x \in E$，$\{f_n(x)\}$ 的上、下极限函数恒相等，即

$$\overline{f}(x) = \underline{f}(x) \qquad (x \in E)$$

显然由上述等式可以在 E 上定义一个函数

$$f(x) = \overline{f}(x) = \underline{f}(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$$

$$(x \in E)$$

则称$\{f_n(x)\}$在 E 上收敛，且称 $f(x)$ 为 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数，记作

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

这里极限函数 f 可取∞为其值。很明显，这里给出的函数列收敛及其极限函数概念是数学分析中相应概念的推广。

习　　题

1．设 $f(x)$是 R^n 上的连续函数。则对任一实数开集G，恒有 $E = \{x | f(x) \in G\}$是开集．

2．在实数集上 $f(x) = x^2$ 不是一致连续函数．

3．设 A 是 R^n 的非空子集，则 $f(x) = \rho(x, A)$是一致连续函数．

4．有界闭集M上的连续函数必有界，且上、下确界可达到．

5．孤立点集上的任何函数都是连续函数，但未必是一致连续函数，

6．设 R^n 中的子集M，a 为M的聚点，且 $a \in M$，$f(x)$在 a 点连续的充要条件是

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

§2　非负可测函数

为建立新积分理论，我们给出可测函数概念．对此将分两步进行，首先给出非负可测函数定义，然后在此基础上讨论一般的可测函数问题．为研究非负可测函数，我们先引入简单函

数概念。

定义 1 设$f(x)$是定义在可测集E上的实值函数，如果E可分解为有限个互不相交的可测子集的并，即

$$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i,\quad E_i\cap E_j=\phi\quad(i\neq j)$$

使得在每个E_i上$f(x)$都是一个常数，则称$f(x)$是E上的**简单函数**。

显然，任何可测集的特征函数都是简单函数；我们在数学分析中学习过的迪里赫莱函数和符号函数也都是简单函数。

由简单函数定义，不难证得任何两个简单函数的和与积仍是一个简单函数。但一列简单函数的极限函数，却可能不再是简单函数。

实际上，容易看出简单函数只能有有限个互不相同的函数值，因此凡是有无限多个不同函数值的函数都不能是简单函数。

定义 2 设$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$是可测集$E$上的一列非负简单函数，且

$$\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\cdots$$

则称极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$$

为E上**非负可测函数**。

由非负可测函数定义可知：

① 虽然在定义 2 中把简单函数列加强为非负和增加的，但很明显这仍不能保证其极限函数为简单函数，所以非负可测函数未必是非负简单函数。

② 非负简单函数$\varphi(x)$必是非负可测函数，事实上，这

只须令 $\varphi_n(x)\equiv\varphi(x)$ $(n=1,2,\cdots,)$就可以了。

③ $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$ 可能在某些点上等于∞。

定理1 可测集E上的非负函数 $f(x)$ 非负可测的充要条件是，对于任意实数 a，点集

$$\{x|f(x)>a\}$$

总是可测集。

证明 必要性 已知 $f(x)$在E上非负可测，往证对任一实数 a，$\{x|f(x)>a\}$是可测集，为此只须把$\{x|f(x)>a\}$表成有限或可列个可测集的并集。

1° 由定义2知，存在非负增加简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$，，使

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\inf_m\sup_{n\geq m}\{\varphi_n(x)\}=\sup_m\inf_{n\geq m}\{\varphi_n(x)\}$$

2° 对任意实数 a，往证

$$\{x|f(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|\varphi_n(x)>a\}\qquad(1)$$

左$\subseteq$右 设 $x_0\in\{x|f(x)>a\}$，即

$$f(x_0)=\overline{f}(x_0)=\inf_m\sup_{n>m}\{\varphi_n(x_0)\}>a\qquad(2)$$

若对任意 n，恒有 $\varphi_n(x_0)\leqslant a$，则对任意 m，当 $n\geqslant m$ 时，恒有

$$\sup_{n>m}\{\varphi_n(x_0)\}\leqslant a$$

于是有

$$f(x_0)=\inf_m\sup_{n>m}\{\varphi_n(x_0)\}\leqslant a$$

这与式（2）矛盾。从而必有 n_0，使 $\varphi_{n_0}(x_0)>a$，故有

$$x_0\in\{x|\varphi_{n_0}(x)>a\}\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|\varphi_n(x)>a\}$$

左$\supseteq$右　设$x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|\ \varphi_n(x)>a\}$，有$m_0$，使

$$x_0\in\{x|\ \varphi_{m_0}(x)>a\}，即\ \varphi_{m_0}(x_0)>a \quad (3)$$

若

$$f(x_0)=\underline{f}(x_0)=\sup_m \inf_{n\geqslant m}\{\varphi_n(x_0)\}\leqslant a$$

则对任意m，有

$$\inf_{n\geqslant m}\{\varphi_n(x_0)\}\leqslant a$$

但$\{\varphi_n(x_0)\}$是增加列，从而有

$$\varphi_{m_0}(x_0)=\inf_{n\geqslant m_0}\{\varphi_n(x_0)\}\leqslant a$$

这与式（3）矛盾．于是有$f(x_0)>a$，即

$$x_0\in\{x|f(x)>a\}$$

由简单函数定义可知，每个$\{x|\varphi_n(x)>a\}$都是可测集，从而由式（1）知$\{x|f(x)>a\}$是可测集．

充分性　已知对任意实数a，$\{x|f(x)>a\}$都是可测集，往证$f(x)$非负可测，为此显然只须构造出非负增加简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$，使其极限函数是$f(x)$．

1°　若对任意实数a，$\{x|f(x)>a\}$都可测，则对任意实数c和d，$\{x|c\leqslant f(x)<d\}$也都可测．

事实上，因为

$$\{x|c\leqslant f(x)<d\}=\{x|c\leqslant f(x)\}\cap\{x|f(x)<d\}$$

于是问题归结为只须证明，对任意实数c和d，$\{x|f(x)\geqslant c\}$和$\{x|f(x)<d\}$都可测．

由于

$$\{x|\ f(x)\geqslant c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x|\ f(x)>c-\frac{1}{n}\} \quad (4)$$

$$\{x \mid f(x) < d\} = E \cap C\{x \mid f(x) \geqslant d\} \qquad (5)$$

由条件知，每个 $\{x \mid f(x) > c - \frac{1}{n}\}$ 都可测，从而由式（4）知$\{x \mid f(x) \geqslant c\}$可测，于是由式（5）知$\{x \mid f(x) < d\}$也可测。

2° 构造非负增加简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}$，

先将可测集E做如下的分解，令

$$E_{n,k} = \{x \mid \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}\} \quad (k = 0, 1, \cdots, n2^n - 1,$$

$$n = 1, 2, \cdots)$$

$$E_{n,n2^n} = \{x \mid f(x) \geqslant n\}$$

由1°知，所有这些 $E_{n,k}$ 和 $E_{n,n2^n}$ 都是可测集，且显然有

$$E = \bigcup_{k=0}^{n2^n} E_{n,k}$$

下面分析一下 $E_{n,k}$ 都是怎样的点集。

当 $n=1$ 时，$k=0$，1，2，此时E分为三个集，即

$$E_{1,0} = \{x \mid 0 \leqslant f(x) < \frac{1}{2}\}, \quad E_{1,1} = \{x \mid \frac{1}{2} \leqslant f(x) < 1\},$$

$$E_{1,2} = \{x \mid f(x) \geqslant 1\}$$

当 $n=2$ 时，$k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$，此时将E分为九个集。

$$E_{2,0} = \{x \mid 0 \leqslant f(x) < \frac{1}{4}\}, \quad E_{2,1} = \{x \mid \frac{1}{4} \leqslant f(x) < \frac{2}{4}\}$$

$$E_{2,2} = \{x \mid \frac{2}{4} \leqslant f(x) < \frac{3}{4}\}, \quad E_{2,3} = \{x \mid \frac{3}{4} \leqslant f(x) < \frac{4}{4}\}$$

$$E_{2,4} = \{x \mid \frac{4}{4} \leqslant f(x) < \frac{5}{4}\}, \quad E_{2,5} = \{x \mid \frac{5}{4} \leqslant f(x) < \frac{6}{4}\}$$

$$E_{2,6}=\{x \mid \frac{6}{4}\leqslant f(x)<\frac{7}{4}\},\ E_{2,7}=\{x \mid \frac{7}{4}\leqslant f(x)<\frac{8}{4}\}$$

$$E_{2,8}=\{x \mid f(x)\geqslant 2\}$$

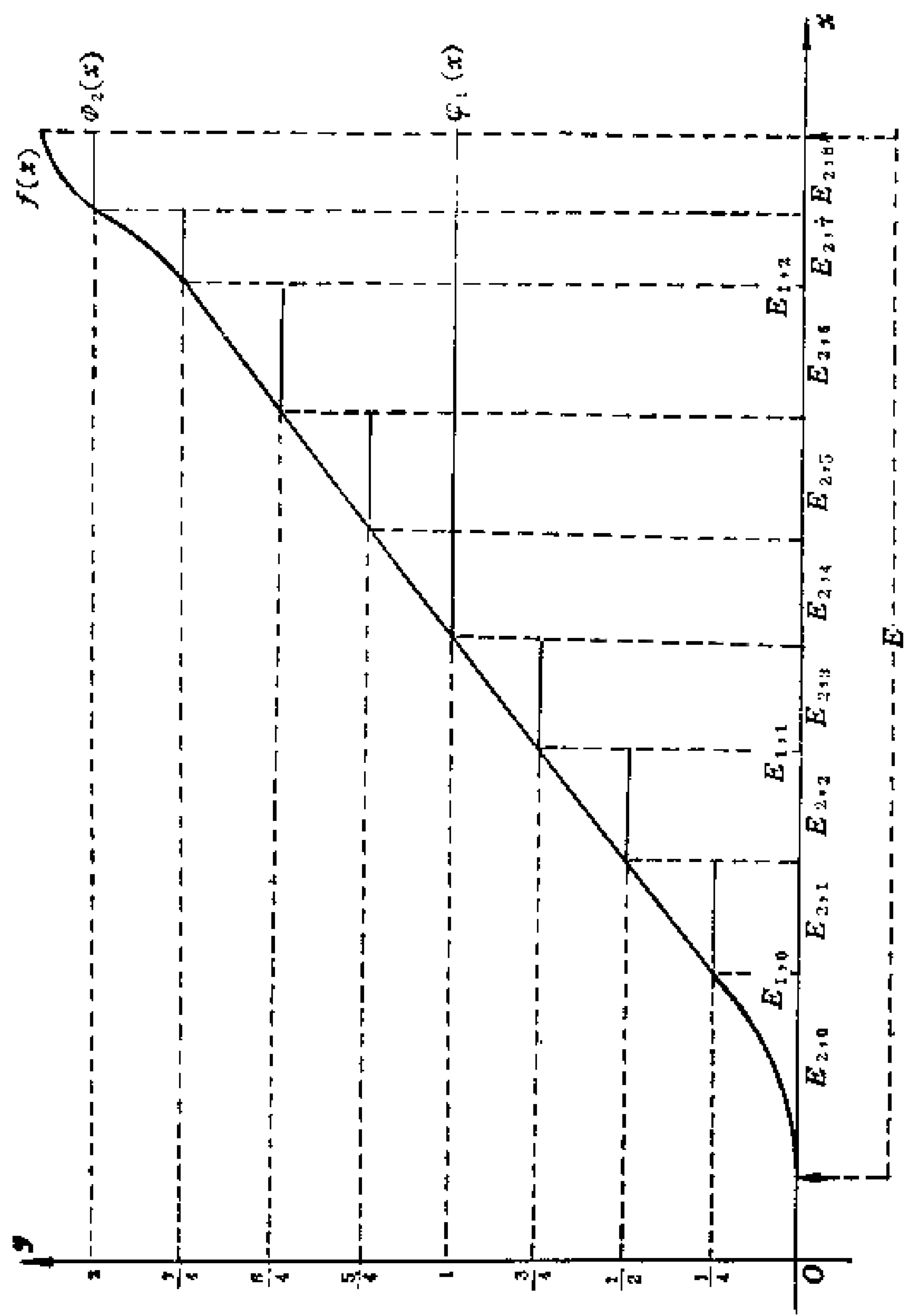


图4—1　简单函数列构造方法示意图

依此类推，将E一次一次地分解下去，然后在E的每一次分解上定义一个简单函数，即令

$$\varphi_n(x)=\frac{k}{2^n},\ \text{当}\ x\in E_{n,k}\ \text{时}\ (k=0,1,2,\cdots,n2^n)$$

则显然$\{\varphi_n(x)\}$是非负增加简单函数列（图4—1）

3° 往证 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$

若x_0使$f(x_0)=+\infty$，则对每个n，皆有$f(x_0)>n$，从而皆有$x_0\in E_{n,n2^n}$。于是由$\varphi_n(x)$定义对每个n皆有

$$\varphi_n(x_0)=\frac{n2^n}{2^n}=n,\ \text{从而有}\ f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)$$

若$f(x_0)<+\infty$，则有自然数N，使$f(x_0)<N$。从而对任意$n\geqslant N$，皆有$x_0\notin E_{n,n2^n}$（若$x_0\in E_{n,n2^n}$，则有$f(x_0)\geqslant n\geqslant N$，矛盾），于是对任意$n\geqslant N$，有$k_n$使$0\leqslant k_n\leqslant n2^n-1$，$x_0\in E_{n,k_n}$，故

$$\frac{k_n}{2^n}\leqslant f(x_0)<\frac{k_n+1}{2^n}$$

而$\varphi_n(x_0)=\dfrac{k_n}{2^n}$，所以对任意$n\geqslant N$，皆有

$$|f(x_0)-\varphi_n(x_0)|<\frac{k_n+1}{2^n}-\frac{k_n}{2^n}=\frac{1}{2^n}$$

因$\dfrac{1}{2^n}\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$，从而也有$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=f(x_0)$。定理证毕。

推论1 下列各条件中的每一个，都是可测集E上非负函数$f(x)$可测的充要条件。

(i) 对任意实数a，$\{x\mid f(x)\geqslant a\}$都可测；

(ii) 对任意实数a，$\{x\mid f(x)<a\}$都可测；

(iii) 对任意实数 a，$\{x|f(x)\leqslant a\}$都可测；

(iv) 对任意实数 a 和 $b, b>a, \{x|a\leqslant f(x)<b\}$都可测。

证明 留给读者。

为了说明非负可测函数的几何意义，我们引入下方图形的概念。

定义 3 设 $E\subseteq R^n$，$f(x)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是E 上的非负函数，G是由 R^{n+1} 中如下的点

$$(x, z)=(x_1, x_2, \cdots, x_n; z)$$

组成的点集，其中 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in E$，$z\in R^1$ 且 $0\leqslant z<f(x)$。则称G为 $f(x)$在E上的下方图形。记作 $G(E,f)$。即

$$G(E, f)=\{(x, z)|x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in E, 0\leqslant z< f(x)\}\subseteq R^{n+1}$$

例 若 $f(x)$是 $E\subseteq R^1$ 上的非负函数，则 $f(x)$在 E 上的下方图形 $G(E, f)$，即是由函数曲线 $f(x)$ 和E围成的图形（除去函数曲线上的点，图 4—2(a)），显然它是 $R^1\times R^1=R^2$中的点集；又如 $f(x)$是 $E\subseteq R^2$ 上的非负函数，则 $G(E,f)$，即是由函数曲面 $f(x)$和E 围成的图形（除去曲面上的点），显然 $G(E, f)$是 $R^2\times R^1=R^3$ 中的点集（图4—2(b)）。

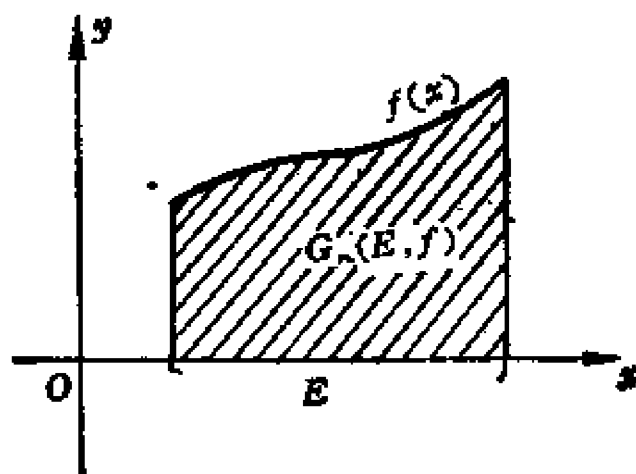


图4—2 (a)

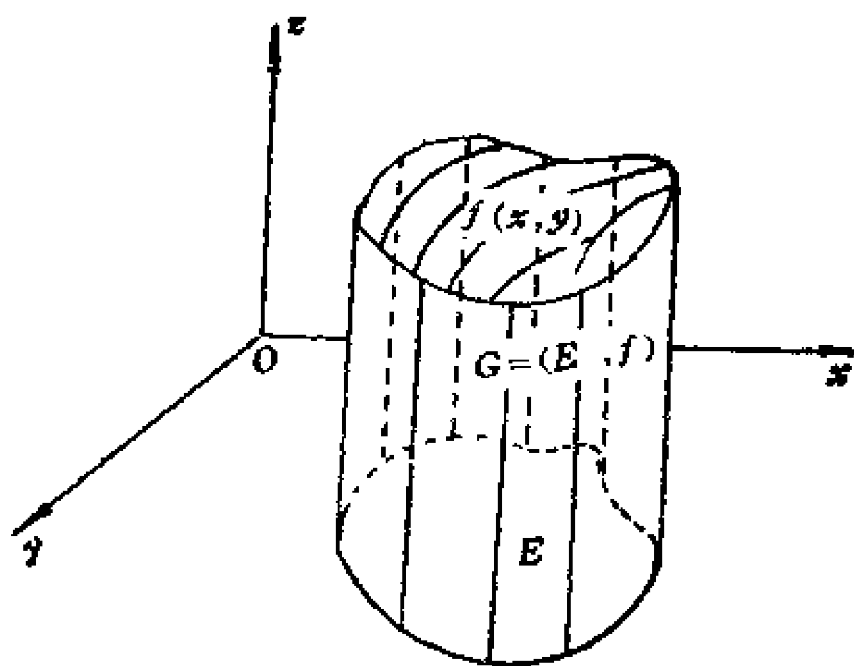


图4—2 (b)

定理 2 设 $E\subseteq R^n$ 是可测集，E 上非负函数 $f(x)$ 可测的充要条件是，$f(x)$ 的下方图形 $G(E, f)$ 是 $n+1$ 维空间 R^{n+1} 中的可测集。

证明 必要性 已知 $f(x)$ 非负可测，往证 $G(E, f)$ 在 R^{n+1} 中可测。

将全体有理数排列为 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$，令

$$E_n=\{x|f(x)>r_n\}\ (n=1,2,\cdots,)$$

则由定理 1 知，每个 E_n 皆是 R^n 中可测集。

再令 B_n 代表 R^1 中区间 $0\leqslant z<r_n$，则 B_n 也是可测的。于是由第三章§5定理 1 知，$E_n\times B_n$，可测。从而

$$G^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\times B_n)$$

是 $R^n\times R^1=R^{n+1}$ 中可测集。

现在我们来证明：$G(E,f)=G^*$。

左$\supseteq$右 设 $(x,z)\in G^*$，则必有 n，使 $(x,z)\in E_n\times B_n$，

即 $x\in E_n$, $z\in B_n$. 于是由 E_n, B_n 的定义，分别有

$$f(x)>r_n,\quad 0\leqslant z<r_n$$

从而有$0\leqslant z<r_n<f(x)$. 即有

$$x\in E_n\subseteq E,\quad 0\leqslant z<f(x)$$

故由 $G(E,f)$定义知有 $(x,z)\in G(E,f)$.

左$\subseteq$右　设 $(x,z)\in G(E,f)$, 则有 $0\leqslant z<f(x)$, 从而应有有理数 r_k, 使 $0\leqslant z<r_k<f(x)$, 于是有

$$x\in E_k,\quad z\in B_k$$

所以有 $(x,z)\in E_k\times B_k\subseteq G^*$

综上得证 $G(E,f)=G^*$, 故 $G(E,f)$在 R^{n+1} 中可测.

充分性　已知 $G(E,f)$可测，往证 $f(x)$在 E 上非负可测. 应用定理 1，只须证明，对任意实数 a, $\{x\mid f(x)>a\}$ 都是 R^n 中可测集.

实事上，因 $G(E,f)$在 R^{n+1} 中可测，于是由第三章§5定理3 知，几乎对 R^1 中所有的 z, R^n 中的集

$$G_z=\{x\mid(x,z)\in G(E,f)\}=\{x\mid f(x)>z\}$$

都可测. 即存在 $N\subseteq R^1$, $mN=0$, 使对

任意 $z\in R^1-N$,

$$G_z=\{x\mid f(x)>z\}\subseteq E \tag{1}$$

都可测. 因 $mN=0$, 故N不能包含 R^1 中任意（非空）区间，故使式（1）成立的 z 必在 z 轴上稠密. 因此，对于任意实数 a, 在 R^1 中必存在合于式（1）要求的且以 a 为极限的单调减少列 $\{z_n\}$, 于是有

$$\{x\mid f(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\mid f(x)>z_n\}$$

因每个$\{x\mid f(x)>z_n\}$可测，从而 $\{x\mid f(x)>a\}$ 可测. 定理证

毕.

下面我们来讨论非负可测函数的运算性质.

引理 设 $E\subseteq R^n$, $\{f_n(x)\}$及 $f(x)$ 分别是E上的函数列和函数，且 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$,则对任意实数 a,必有

$$\{x\mid f(x)\geqslant a\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{x\mid f_n(x)>a-\frac{1}{k}\right\}\quad(*)$$

证明 只须证明式(＊)两端互相包含.

左$\subseteq$右 设 $x_0\in\{x|f(x)\geqslant a\}$,即 $f(x_0)\geqslant a$,由于 $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)$,从而对任一自然数 k,必有 N_k, 当 $n\geqslant N_k$ 时，有

$$f_n(x_0)>a-\frac{1}{k}$$

于是

$$x_0\in\{x\mid f_n(x)>a-\frac{1}{k}\}$$

因对任意 $n\geqslant N_k$ 上式恒成立，故有

$$x_0\in\bigcap_{n=N_k}^{\infty}\{x\mid f_n(x)>a-\frac{1}{k}\}$$

所以

$$x_0\in\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x\mid f_n(x)>a-\frac{1}{k}\}$$

对任意自然数 k皆成立，因此，有

$$x_0\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x\mid f_n(x)>a-\frac{1}{k}\}$$

左$\supseteq$右 若 $x_0\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}\{x\mid f_n(x)>a-\frac{1}{k}\}$，则对任

一自然数 k，皆有

$$x_0 \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > a - \frac{1}{k}\}$$

即有N_0，使

$$x_0 \in \bigcap_{n=N_0}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > a - \frac{1}{k}\}$$

所以当 $n \geqslant N_0$ 时，皆有

$$f_n(x_0) > a - \frac{1}{k}$$

令$n \to \infty$，因 $f_n(x_0) \to f(x_0)$，所以 $f(x_0) \geqslant a - \frac{1}{k}$，对任一自然数 k 恒成立，从而有 $f(x_0) \geqslant a$，即

$$x_0 \in \{x \mid f(x) \geqslant a\}$$

引理证毕。

定理 3　设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$都是$E$上的非负可测函数，且 $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$，则 $f(x)$也是E上的非负可测函数。

证明　由极限的保号性知 $f(x)$ 是非负的，又由引理知，对于任意实数 a，皆有

$$\{x \mid f(x) \geqslant\} a = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > a - \frac{1}{k}\}$$

于是由定理1知，$\{x \mid f_n(x) > a - \frac{1}{k}\}$都可测，从而$\{x \mid f(x) \geqslant a\}$必可测，再由推论 1 知，$f(x)$是非负可测函数。定理证毕。

定理 4　设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 都是E上的非负可测函数，则 $f_1(x) + f_2(x)$，$f_1(x) \cdot f_2(x)$也都是E上的非负可测函数。

证明　由非负可测函数定义知，在E上必有简单函数列

$$0\leqslant\varphi_1^{(1)}(x)\leqslant\varphi_2^{(1)}(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n^{(1)}(x)\leqslant\cdots$$

$$0\leqslant\varphi_1^{(2)}(x)\leqslant\varphi_2^{(2)}(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n^{(2)}(x)\leqslant\cdots$$

使

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(1)}(x)=f_1(x),\quad \lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(2)}(x)=f_2(x)$$

由简单函数性质可知， 对任意 n， $\varphi_n^{(1)}(x)+\varphi_n^{(2)}(x)$，$\varphi_n^{(1)}(x)\cdot\varphi_n^{(2)}(x)$ 仍都是E上非负简单函数，且有

$$\lim_{n\to\infty}\{\varphi_n^{(1)}(x)+\varphi_n^{(2)}(x)\}=\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(1)}(x)+\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(2)}(x)$$

$$=f_1(x)+f_2(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\{\varphi_n^{(1)}(x)\cdot\varphi_n^{(2)}(x)\}=\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(1)}(x)\cdot\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(2)}(x)$$

$$=f_1(x)\cdot f_2(x)$$

于是由定理 3 知，$f_1(x)+f_2(x)$，$f_1(x)\cdot f_2(x)$ 都是E上非负可测函数。定理证毕。

习　　题

1、试证迪里赫莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在R上必为可测函数。

2。试证黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & \text{当 } x=\dfrac{m}{n}\text{，其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互质的数}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在 R 上必为可测函数。

3。试证非负简单函数必可测。

4。试证非负单调函数必可测。

§3 可 测 函 数

在§2中我们讨论了非负可测函数，在本节里将借此来定义一般的可测函数，并研究其性质。为此，先引进一种特殊的非负函数，使得任意函数总可表为由它自身生成的这种非负函数的代数和。

对于可测集E上任意函数$f(x)$，令

$$f^{+}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{当 } x \text{ 使 } f(x)>0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 使 } f(x)\leqslant 0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$f^{-}(x)=\begin{cases} -f(x) & \text{当 } x \text{ 使 } f(x)<0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 使 } f(x)\geqslant 0 \text{ 时} \end{cases}$$

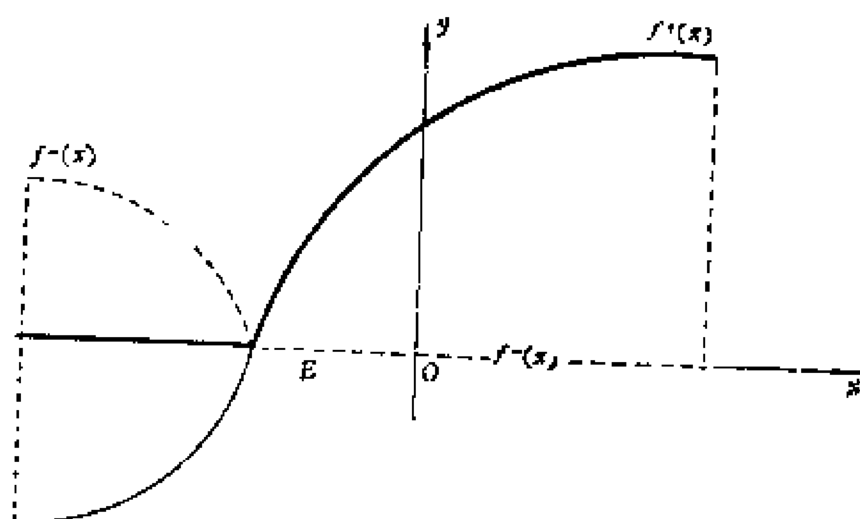


图4—3

显然$f^{+}(x)$，$f^{-}(x)$都是非负函数，并且

$$f(x)=f^{+}(x)-f^{-}(x) \quad (\text{图 } 4-3)$$

定义1 若$f^{+}(x)$，$f^{-}(x)$都是E上非负可测函数，则称$f(x)$为E上的**可测函数**。

显然非负可测函数都是可测函数。

定理1 可测集E上的函数$f(x)$可测的充要条件是：对

任意实数 a，$\{x|f(x)>a\}$恒可测。

证明 必要性 已知 $f(x)$可测，即$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，且 $f^+(x)$，$f^-(x)$皆非负可测，往证对任意实数a，$\{x|f(x)>a\}$恒可测。

事实上，对任意实数 a，若 $a\geqslant 0$，则

$$\{x|f(x)>a\}=\{x|f^+(x)>a\}$$

因为 $f^+(x)$是非负可测函数，从而 $\{x|f^+(x)>a\}$ 是可测集，所以 $\{x|f(x)>a\}$是可测集。

若 $a<0$，则

$$\{x|f(x)>a\}=\{x|f^-(x)<-a\}$$

因 $f^-(x)$非负可测，故$\{x|f^-(x)<-a\}$ 是可测集，所以 $\{x|f(x)>a\}$是可测集。

充分性 已知对于任意实数 a，$\{x|f(x)>a\}$ 恒可测，往证 $f(x)$可测，即须证 $f^+(x)$，$f^-(x)$非负可测。

先看 $f^+(x)$。对任意实数 a，若 $a\geqslant 0$，则有

$$\{x|f^+(x)>a\}=\{x|f(x)>a\}$$

由于 $\{x|f(x)>a\}$可测，故$\{x|f^+(x)>a\}$可测。

若$a<0$，则

$$\{x|f^+(x)>a\}=E$$

由于E可测，故$\{x|f^+(x)>a\}$亦可测。于是 $f^+(x)$是非负可测函数。

再看 $f^-(x)$。对于任意实数 a，若 $a>0$，则

$$\{x|f^-(x)<a\}=\{x|f(x)>-a\}$$

由于$\{x|f(x)>-a\}$是可测集，所以$\{x|f^-(x)<a\}$必可测。

若 $a\leqslant 0$，则$\{x|f^-(x)<a\}=\phi$，因为 ϕ 可测，所以 $\{x|f^-(x)<a\}$也可测。于是 $f^-(x)$非负可测。定理证毕。

推论 1 对于可测函数，§2定理 1 的推论仍然成立。

推论 2 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是 E 上可测函数，则

$$\{x|f(x)>g(x)\}$$

是可测集。

证明 1° 将全体有理数排成序列

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$$

则有

$$\{x|f(x)>g(x)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{x|f(x)>r_n\}\cap\{x|g(x)<r_n\}) \quad (1)$$

左⊆右 设 $x_0\in\{x|f(x)>g(x)\}$，则 $f(x_0)>g(x_0)$，因有理数集在 R^1 中稠密，故存在有理数 r_m，使

$$f(x_0)>r_m>g(x_0)$$

从而有

$$x_0\in\{x|f(x)>r_m\}\cap\{x|g(x)<r_m\}$$

于是

$$x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{x|f(x)>r_n\}\cap\{x|g(x)<r_n\})$$

左⊇右 设

$$x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{x|f(x)>r_n\}\cap\{x|g(x)<r_n\})$$

于是有 r_k，使

$$x_0\in\{x|f(x)>r_k\}\cap\{x|g(x)<r_k\}$$

即

$$f(x_0)>r_k>g(x_0)$$

从而

$$x_0\in\{x|f(x)>g(x)\}$$

2° 因 $f(x)$，$g(x)$ 皆为可测函数，故对每个 r_n，

$$\{x|f(x)>r_n\}, \quad \{x|g(x)<r_n\}$$

都是可测集，从而

$$\{x|f(x)>r_n\}\cap\{x|g(x)<r_n\}$$

都是可测集，于是由1°中式（1）知

$$\{x|f(x)>g(x)\}$$

是可测集，推论证毕。

下面讨论可测函数的一些运算性质：

引理 设 $f(x)$是E上的可测函数，c 是任意的一个常数，则 $cf(x)$，$f(x)-c$ 都是E上的可测函数。

证明 1° 若 $f(x)$可测，则 $cf(x)$可测。

当 $c=0$ 时， $cf(x)$ 恒为 0，可视为可测集E上的非负简单函数，当然可测。

当 $c>0$ 时，对于任意实数 a，

$$\{x\mid cf(x)>a\}=\{x\mid f(x)>\frac{a}{c}\}$$

由于$\{x\mid f(x)>\frac{a}{c}\}$可测，故 $\{x|cf(x)>a\}$必可测。

当 $c<0$ 时，对于任意实数 a，

$$\{x|\ cf(x)>a\}=\{x|\ f(x)<\frac{a}{c}\}$$

因为$\{x\mid f(x)<\frac{a}{c}\}$可测，故$\{x|cf(x)>a\}$可测。

2° 若$h(x)=f(x)-c$，则对任意实数a，

$$\{x|h(x)>a\}=\{x|f(x)>a+c\}$$

由于 $f(x)$ 是可测函数，故 $\{x|f(x)>a+c\}$ 是可测集，从而$\{x|h(x)>a\}$是可测集，故 $f(x)-c$ 是可测函数。

定理2 设 $f_1(x)$,$f_2(x)$都是E上的可测函数，则 $f_1(x)+f_2(x)$ 也是E上的可测函数。

证明 对任意实数 a，由引理知 $a-f_2(x)$ 是可测函数，从而由推论 2 知

$$\{x|f_1(x)+f_2(x)>a\}=\{x|f_1(x)>a-f_2(x)\}$$

是可测集，于是由定理 1 知，$f_1(x)+f_2(x)$ 是可测函数。

推论 3 $f(x)$ 是可测函数的充要条件是，$f(x)$是两个非负可测函数之差。

证明 必要性 若 $f(x)$ 可测，则由可测函数定义知，$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$且 $f^+(x)$,$f^-(x)$皆是非负可测函数。

充分性 若已知 $f(x)$是两个非负可测函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 之差，即 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$，于是由引理知 $-f_2(x)$ 仍是可测函数，故由定理 2 知，

$$f_1(x)+(-f_2(x))$$

是可测函数，从而 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ 是可测函数。

定理 3 若 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 都是可测函数，则$f_1(x)\cdot f_2(x)$也是可测函数。

证明 因为 $f_1(x)=f_1^+(x)-f_1^-(x)$，$f_2(x)=f_2^+(x)-f_2^-(x)$，则

$$\begin{aligned}f_1(x)\cdot f_2(x)&=[f_1^+(x)-f_1^-(x)][f_2^+(x)-f_2^-(x)]\\&=[f_1^+(x)\cdot f_2^+(x)+f_1^-(x)\cdot f_2^-(x)]-\\&\quad[f_1^+(x)\cdot f_2^-(x)+f_2^+(x)\cdot f_1^-(x)]\end{aligned}$$

于是由§2定理 4 及推论 3 知，$f_1(x)\cdot f_2(x)$ 是可测函数。

定理 4 若 $f(x)$ 是可测函数，则 $|f(x)|$ 也是可测函数。

证明 因为 $|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$，而 $f^+(x)$，$f^-(x)$都可测，故由定理 2 知，$|f(x)|$必可测。

定理 5 若 $f(x)$ 是可测函数，且几乎处处不为零，则

$\frac{1}{f(x)}$也是可测函数。

证明 不妨设 $f(x)$ 恒不为0，即 $f(x)\neq 0$。只须证明对任意实数 a，$\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{f(x)}>a\right\}$ 恒为可测集。

事实上，对任意实数 a，

$a>0$ 时，显然有

$$\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{f(x)}>a\right\}=\left\{x \,\middle|\, 0<f(x)<\frac{1}{a}\right\} \qquad (1)$$

$a=0$时，$\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{f(x)}>a\right\}=\left\{x \,\middle|\, f(x)>0\right\}$ $\qquad (2)$

$a<0$时，则有

$$\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{f(x)}>a\right\}=\left\{x \,\middle|\, f(x)>0\right\}\bigcup\left\{x \,\middle|\, f(x)<\frac{1}{a}\right\} \qquad (3)$$

因为$f(x)$是可测函数，故上述式（1），（2），（3）的右端都是可测集，从而其左端

$$\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{f(x)}>a\right\}$$

是可测集．故$\frac{1}{f(x)}$是可测函数。

定理 6 设$f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_n(x)$，$\cdots$是E上一列可测函数，且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，则$f(x)$也是$E$上可测函数。

证明 因$f_n(x)=f_n^+(x)-f_n^-(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是可测函数，故由可测函数定义知

$$f_n^+(x),\ f_n^-(x) \qquad (n=1,\ 2,\cdots)$$

都是E上非负可测函数。

又因，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，故有

$$\lim_{n\to\infty}f_n^+(x)=f^+(x),\quad \lim_{n\to\infty}f_n^-(x)=f^-(x),$$

事实上，任取$x_0\in E$，分两种情况讨论：

若(i) $f^+(x_0)>0$，则$f^+(x_0)=f(x_0)$。因$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)$，则由极限保号性知，应有$N$，使当$n\geqslant N$时，有$f_n(x_0)>0$，从而当$n\geqslant N$时有$f_n(x_0)=f_n^+(x_0)$，故

$$f^+(x_0)=f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}f_n^+(x_0)$$

(ii) 若$f^+(x_0)=0$，则$f(x_0)<0$或$f(x_0)=0$。当$f(x_0)<0$时，类似(i)的证明，由$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)$，应有$N$，当$n\geqslant N$时，$f_n(x_0)<0$，故当$n\geqslant N$时，$f_n^+(x_0)=0$，从而有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n^+(x_0)=f^+(x_0)$

当$f(x_0)=0$时，因为

若$f_n(x_0)>0$，则$f_n(x_0)=f_n^+(x_0)$

若$f_n(x_0)\leqslant 0$，则$f_n^+(x_0)=0$

故由$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)$知有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n^+(x_0)=f^+(x_0)$。

同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n^-(x_0)=f^-(x_0)$。

于是由§2定理3知，$f^+(x)$，$f^-(x)$都是非负可测函数。从而$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$是可测函数。

定理7 设$\{f_n(x)\}$是E上的可测函数列，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}f_n(x)=\inf_m\sup_{n\geqslant m}\{f_n(x)\},\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}f_n(x)=\sup_m\inf_{n\geqslant m}\{f_n(x)\}$$

都是E上可测函数。

证明 1° 往证$\sup\limits_n\{f_n(x)\}$及$\inf\limits_n\{f_n(x)\}$都是E上可测函数。

事实上，对任意实数a，有

$$\{x\mid\sup_n\{f_n(x)\}>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\mid f_n(x)>a\}\quad (1)$$

$$\{x \mid \inf_n \{f_n(x)\} < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) < a\} \quad (2)$$

由于每个 $f_n(x)$ 都可测，所以

$$\{x|f_n(x) > a\}, \quad \{x|f_n(x) < a\}$$

都是可测集，从而式（1）及（2）的右端都是可测集，故其左端亦皆是可测集，所以

$$\sup_n \{f_n(x)\}, \quad \inf_n \{f_n(x)\}$$

都是可测函数。

2° 由1°知对每个确定的 m，

$$\sup_{n>m}\{f_n(x)\}, \quad \inf_{n>m}\{f_n(x)\}$$

都是E上可测函数，从而

$$\left\{\sup_{n>m}\{f_n(x)\}\right\}_{m\in N} \quad \left\{\inf_{n>m}\{f_n(x)\}\right\}_{m\in N}$$

都是E上可测函数列，于是仍由1°知

$$\inf_m\left\{\sup_{n>m}\{f_n(x)\}\right\}, \quad \sup_m\left\{\inf_{n>m}\{f_n(x)\}\right\}$$

都是E上可测函数，故

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x), \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$$

皆为E上可测函数。

习　　题

1. 若$mE=0$，则任意 $f(x)$ 都是E上的可测函数。
2. 若 $f(x)$ 是连续函数，则$f(x)$ 是任意可测集合E上的可测函数。
3. 若 $f(x)=g(x)$ $P\cdot P$于 E，则 $f(x)$ 与$g(x)$在E上的可测性相同。
4. 证明任何一元单调函数都是可测函数。

5. E上可测函数 $f(x)$ 在E的任意可测子集上也是可测函数.

6. $\{r_n\}$ 为全体有理数作成的数列. 可测集E上的函数 $f(x)$ 对于所有的r_n, 若 $\{x|f(x)\geqslant r_n\}$皆可测, 则 $f(x)$ 在E上必为可测函数.

7. $|f(x)|$ 在E上是可测函数, 而 $f(x)$ 未必是E上的可测函数.

8. 证明$f(x)$是E上的可测函数的充要条件是有一列简单函数 $\phi_n(x)$, 使$\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(x)=f(x)$.

9. 设 $f_1(x)$ 是 $E_1\subseteq R^p$, $f_2(y)$ 是 $E_2\subseteq R^q$ 上的可测函数, 证明 $f_1(x)\cdot f_2(y)$是 $E_1\times E_2$上的可测函数.

§4 叶果洛夫(Егоров)定理

在数学分析中, 我们知道, 一致收敛条件在研究极限函数连续性以及逐项积分、逐项微分等问题时起着重要的作用. 我们也知道, 收敛函数列未必是一致收敛的. 例如,$f_n(x)=x^n$在$(0,1)$上处处收敛于0, 但它并不一致收敛, 不过易于看出, 对于任意 $\varepsilon>0$, 我们只要从$(0,1)$中去掉一个长为 ε 的小区间$(1-\varepsilon,\ 1)$便能使 $f_n(x)$ 在余下的点集上具有一致收敛性. 这就是说, 从点集E 中去掉一个“很小”的子集 e, 就有可能使 $E-e$ 上的函数列一致收敛.

对于可测函数列人们自然会想到, 是否收敛与一致收敛之间也有上述类似的关系? 这就是叶果洛夫定理所回答的问题.

引理 设$\{f_n(x)\}$ 是 E 上一列函数, $f(x)$ 是E上函数, 则所有使 $f_n(x)$ 不收敛于 $f(x)$ 的点 x 组成的点集 D, 可以表成

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\right\}\quad(*)$$

的形式. 其中

$$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>\varepsilon_k>\cdots$$

是任意一列严格减少且趋于零的正数。

证明 只须证明(*)式两端互相包含。

左⊆右 设$x_0\in D$，即 $f_n(x_0)\not\to f(x_0)$ （$\not\to$ 表示不收敛），于是存在某个 $\varepsilon_0>0$，使对任意自然数 m，必有

$$n\geqslant m, \text{使} \quad |f_n(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$$

记此 n 为n_m，于是显然可得到一列正整数

$$n_1<n_2<\cdots<n_m<\cdots$$

使 $n_m\to\infty$，且

$$|f_{n_m}(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$$

又因 $\{\varepsilon_k\}$ 是严格减小趋于零的正数列，从而必有ε_{k_0}，使$\varepsilon_0>\varepsilon_{k_0}>0$，所以有

$$|f_{n_m}(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_{k_0} \quad (m=1,2,\cdots)$$

从而有

$$x_0\in\left\{x\,\middle|\,|f_{n_m}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_{k_0}\right\} \qquad (m=1,2,\cdots)$$

于是由$n_m\to\infty$可知，对任意自然数 N，恒有

$$x_0\in\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_{k_0}\right\} \quad (N=1,2,\cdots)$$

因上式对任意N皆成立，故有

$$x_0\in\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_{k_0}\right\}$$

于是显然有

$$x_0\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\right\}$$

左⊇右 设 $x_0\in$右，往证 $f_n(x_0)\not\to f(x_0)$，为此只须证明

存在某个 $\delta>0$，，使对任意自然数 P，必有 $n\geqslant P$，使

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|\geqslant\delta$$

事实上，设

$$x_0\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\right\}$$

于是有某个 $\varepsilon_{i_0}>0$，使

$$x_0\in\bigcap_{N=1}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_{i_0}\right\}$$

从而对任意自然数 P，显然可取到$N\geqslant P$，使

$$x_0\in\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_{i_0}\right\}$$

故有 $n\geqslant N\geqslant P$，使

$$x_0\in\{x\,|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_{i_0}\}$$

即有 $n\geqslant P$，使

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_{i_0}$$

于是由 $\varepsilon_{i_0}>0$ 和 P 的任意性知

$$f_n(x_0)\not\rightarrow f(x_0)$$

从而 $x_0\in D$。于是引理证毕。

定理 （叶果洛夫） 设

(i) $mE<+\infty$；

(ii) $\{f_n(x)\}$ 是E上一列几乎处处取有限值的可测函数；

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ P.P.于 E，且 $|f(x)|<+\infty$ P.P. 于E。则对任意 $\delta>0$，恒有 E的可测子集 e，使 $me<\delta$，且在 $E-e$ 上$\{f_n(x)\}$ 一致收敛于$f(x)$。

本定理证明的大体思路是：先分析破坏一致收敛的点的性质，再根据这种性质构造E的一个可测子集 e，使 $\{f_n(x)\}$在$E-e$ 上一致收敛于 $f(x)$。然后为使 e 满足 $me<\delta$ 条件，而利用使 $f_n(x) \nrightarrow f(x)$的点集D的测度（由（(iii)知 $mD=0$）来控制 e 的测度使其合于小于 δ 的条件。

证明 第一步 构造E的子集 e，使在 $E-e$ 上$\{f_n(x)\}$一致收敛于 $f(x)$。

1° 首先考察欲使 $e\subseteq E$ 合于条件，e 应由具有何种性质的点所组成，从而依此性质来构作所要求的子集。

由一致收敛定义知，要使 e 合于要求，必须满足条件：

对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数N，使当 $n\geqslant N$ 时，对所有$x\in E-e$，皆有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

容易理解，上述条件可代之以：

设 $\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>\varepsilon_k\cdots\to 0$，对任意 $\varepsilon_k>0$，存在 N_k，使当$n\geqslant N_k$ 时，对所有 $x\in E-e$，皆有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon_k \tag{1}$$

于是可知，对任一 $\varepsilon_k>0$，E中使式（1）不成立，即使

$$|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k \quad (n\geqslant N_k)$$

成立的那些点 x 都应从E中除掉，这也就是说这样的点 x 都应属于所求的子集 e。从而

$$e_k=\bigcup_{n=N_k}^{\infty}\left\{x \,\middle|\, |f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\right\} \tag{2}$$

中的点都应从E中除掉．即 e_k 应是所求的 e 的子集．

因对每个 $\varepsilon_k>0$，相应的E中都有一个合于式（2）的子集 e_k，所以我们令

$$e=\bigcup_{k=1}^{\infty}e_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=N_k}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\right\}$$

显然 $e\subseteq E$。

2° 往证对1°中的 $e=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}e_k$，$\{f_n(x)\}$在 $E-e$ 上一致收敛于 $f(x)$。

事实上，对任意 $\varepsilon>0$，$\{\varepsilon_k\}$ 中有 ε_{k_0}，使 $0<\varepsilon_{k_0}<\varepsilon$，另外，对所有 $y\in E-e=E-\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}e_k$，皆有 $y\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}e_k$，即 $y\notin e_k$ $(k=1,2,\cdots)$，从而对 k_0，有

$$y\notin e_{k_0}=\bigcup_{n=N_{k_0}}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_{k_0}\right\}\quad(y\in E-e)$$

即当 $n\geqslant N_{k_0}$ 时，都有

$$y\notin\{x\,|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_{k_0}\}\qquad(y\in E-e)$$

从而都有

$$|f_n(y)-f(y)|<\varepsilon_{k_0}<\varepsilon\qquad(y\in E-e)$$

于是得证在 $E-e$ 上$\{f_n(x)\}$一致收敛于 $f(x)$。

第二步，往证对任意 $\delta>0$，必有 $e\subseteq E$，e 满足第一步中的条件，且 $me<\delta$。

1° 合于第一步中条件的 e 必是可测的。

因为

$$e=\bigcup_{k=1}^{\infty}e_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=N_k}^{\infty}\{x\,|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}$$

于是由定理的条件(ii)及(iii)知，$f(x)$ 和每个 $f_n(x)$ 都是E上可测函数，从而由§3引理、定理2及定理4知$|f_n(x)-f(x)|$

都是可测函数，故由§3推论1知，每个

$$\{x \mid |f_n(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon_k\}$$

都是可测集，从而 e 是可测集。

2° 由e的定义可知，要使"me小"只须每个""me_k小"。但由 e_k 的定义（式（2））可看出，那里的 N_k 并未加以限制，实际上，当把 N_k 取得充分大时，可使 me_k 充分小。

因为由引理知，$f_n(x) \not\to f(x)$的点 x 所成的集是

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{x \mid |f_n(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon_k\}$$

于是由条件(iii)知 $mD=0$。

因为 $mD=0$，所以D的子集的测度亦为零，故对每个 k，皆有

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x \mid |f_n(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon_k\right\}\right)=0$$

显然 $\bigcap_{N=1}^{\infty}\left\{\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x \mid |f_n(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon_k\right\}\right\}$

是单调减少可测集列的交，于是由第三章§3定理11及其说明知，极限集（即交集）的测度等于测度的极限，故有

$$\lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x \mid |f_n(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon_k\right\}\right)=0$$

由于这是一个收敛于零的数列，故由极限定义知，对任意 $\delta>0$，只要N_k充分大就可以使

$$me_k=m\left(\bigcup_{n=N_k}^{\infty}\left\{x \mid |f_n(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon_k\right\}\right)$$

充分地小。于是对每个 k，可把相应的 N_k 取大到使

$$me_k < \frac{\delta}{2^k}$$

于是有

$$me = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} e_k\right) < \sum_{k=1}^{\infty} me_k < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta$$

综上定理全部证毕。

注意：$mE_\delta = mE - me > mE - \delta$，故本定理也可叙述为对任意 $\delta > 0$，恒有 $E_\delta \subseteq E$，使 $mE_\delta > mE - \delta$，而$\{f_n(x)\}$在E_δ上一致收敛。

本定理说明了可测函数列几乎处处收敛与一致收敛之间的关系，它常常成为处理极限问题的有力工具。因为通过这个定理，可以对不一致收敛的函数列部分地“恢复”一致收敛性。我们知道一致收敛性在许多问题中起着重要的作用，因此本定理的意义是十分明显的。下一节讨论可测函数构造时，就要利用叶果洛夫定理来考虑有关连续性的问题。

叶果洛夫定理中 $mE < +\infty$条件不可去掉，若 $mE = +\infty$时，叶果洛夫定理不再成立。读者可参见本章的补充例题 4 。

§5 鲁金(Лузин)定理

前面已经说过，我们所要研究的函数是可测函数。可测函数类要比连续函数类广泛的多。实际上，连续函数、单调函数都是可测函数，而迪里赫来函数和黎曼函数虽不连续但也都是可测函数。尽管许多不连续函数是可测的，但可测函数与连续函数之间还是有着密切的关系，这从下面的鲁金定理即可看出。

定理 1 （鲁金）设

(i) $mE<+\infty$。

(ii) $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数。则对任意 $\varepsilon>0$，恒有闭集 $F\subseteq E$，使

（1） $m(E-F)<\varepsilon$;

（2） $f(x)$是 F 上的连续函数。

因为可测函数是简单函数列的极限，所以我们分两步来进行：首先证 $f(x)$是简单函数的情形；然后再证 $f(x)$是一般的几乎处处有限的可测函数的情形。

证明 第一步 设 $f(x)$ 是简单函数。

即 $f(x)=c_i$，当 $x\in E_i$。 此处 E_i 是互不相交的可测集，且 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$。

因 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$都可测，故由第三章§4定理 9 知，对每个 E_i 有闭集 $F_i\subseteq E_i$，使

$$m(E_i-F_i)<\frac{\varepsilon}{n}\qquad(\varepsilon>0)$$

令 $F=\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i$，则 F 是闭集，且有

① 因为对每个 i，$F_i\subseteq E_i$，所以有

$$F=\bigcup_{i=1}^{n}F_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}E_i=E$$

② $$m(E-F)=m\left[\bigcup_{i=1}^{n}E_i-\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right]=m\left[\bigcup_{i=1}^{n}(E_i-F_i)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m(E_i-F_i)<n\cdot\frac{n}{\varepsilon}=\varepsilon$$

③ $f(x)$在F上连续。

事实上，设 $x_0\in F$，则由 $F=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$ 知应有 $i_0\leqslant n$，使 $x_0\in F_{i_0}$，注意到 F_i 是一些互不相交的闭集，所以有 $d>0$，使

$$\rho(x_0,\ F_i)>d \qquad (i\neq i_0)$$

从而

$$F\cap N(x_0,d)=F_{i_0}\cap N(x_0,d)$$

但是 $f(x)$在$F_{i_0}\subseteq E_{i_0}$上取常值c_{i_0}，于是对任意$x\in F\cap N(x_0,d)$，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|=c_{i_0}-c_{i_0}=0$$

从而显然 $f(x)$在点 x_0 连续，由 x_0 的任意性知 $f(x)$是 F 上连续函数。

第二步　设 $f(x)$是一般的几乎处处有限可测函数。

不妨设 $f(x)\geqslant 0$，于是由§3习题 8 知，必有一列非负简单函数 $\varphi_n(x)\to f(x)$。根据叶果洛夫定理知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $E_\delta\subseteq E$，使 $m(E-E_\delta)<\frac{\varepsilon}{2}$，且在 E_δ 上 $\varphi_n(x)$一致收敛于 $f(x)$。

基于第一步的证明可知，对每个简单函数 $\varphi_n(x)$，都有闭集 $F_n\subseteq E_\delta$，使

$$m(E_\delta-F_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

并且 $\varphi_n(x)$在 F_n 上是连续函数。

令

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$$

则有 ① F 是闭集；

② 因为 $F_n \subseteq E_\delta$，故有 $F \subseteq E_\delta \subseteq E$；

③ $$m(E_\delta - F) = m\left[E_\delta - \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right] = m\left[E_\delta \cap \mathscr{C}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)\right]$$

$$= m\left[E_\delta \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{C} F_n\right)\right] = m\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_\delta \cap \mathscr{C} F_n)\right]$$

$$= m\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_\delta - F_n)\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(E_\delta - F_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是有

$$m(E - F) \leqslant m(E - E_\delta) + m(E_\delta - F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因在 F 上每个 $\varphi_n(x)$ 都连续，且在其上 $\varphi_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$，故由§1定理 2 知 $f(x)$ 亦必连续。

综上定理证毕。

上述证明方法值得注意的有两点：

① 先考虑简单函数，然后再往一般函数过渡，这是在许多情况下都行之有效的方法。

② 在证明中叶果洛夫定理的应用也很成功。

定理 2 设 E 是 R^1 的可测子集，且 $E \subseteq (a, b)$；$f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，则对任意 $\varepsilon > 0$，有闭集 $F \subseteq E$ 及在 R^1 上连续的函数 $g(x)$，使

（1） 当 $x \in F$ 时，$f(x) = g(x)$；

（2） $m(E - F) < \varepsilon$。

证明 由定理 1 知，有闭集 $F \subseteq E$，使得 $m(E - F) < \varepsilon$，且

在F上$f(x)$连续。因此问题在于扩张F上的$f(x)$，使其在整个R^1上连续。

事实上，由于$F\subseteq E$而E有界，故F为有界闭集，因此F是从一闭区间$[c,d]\subseteq(a,b)$中去掉至多可列个互不相交的开区间而成，设这些开区间为(c_i,d_i)。

现在我们在R^1上定义一个函数$g(x)$，使

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\leqslant a \text{ 或 } x\geqslant b\\ f(x) & \text{当 } x\in F\\ f(c)\dfrac{x-a}{c-a} & \text{当} x\in(a,c)\\ f(d)\dfrac{b-x}{b-d} & \text{当} x\in(d,b)\\ f(c_i)+\dfrac{f(d_i)-f(c_i)}{d_i-c_i}(x-c_i) & \text{当 } x\in(c_i,\ d_i)\end{cases}$$

$g(x)$的图形作如下理解：当$x\leqslant a$，$x\geqslant b$及$x\in F$时是明显的；当$x\in(a,c)$及$x\in(d,b)$时，$g(x)$是连结平面上点(a,o)，$(c,f(c))$及(b,o)，$(d,f(d))$的直线；当$x\in(c_i,d_i)$时，$g(x)$是连结平面上点$(c_i,f(c_i))$，$(d_i,f(d_i))$的直线。

由上述$g(x)$的定义，显然$g(x)$是R^1上连续函数且满足定理的各项要求。定理证毕。

（注意：当F的邻接区间，即(c_i,d_i)只有有限多个时，$g(x)$的连续性是显然的，但当F的邻接区间有可列无限多个时，$g(x)$的连续性就不是那么明显了。）

定理2中要求E是R^1中的点集，显然这个限制并不是必要的，只要我们知道如何把一个n维空间中的有界闭集F上的连续函数扩张到整个空间上去，定理2也立即可以推广到n维

空间。

如果注意到，对于任意闭集F，总可以作一完备集$P\subseteq F$，使 $mP=mF$，则显然定理1及定理2中之闭集尚可要求是完备集。

鲁金定理揭示了可测函数与连续函数间的关系，使我们对可测函数的结构有了进一步的了解。

另外，鲁金定理在应用上很重要，因为通过它常常能把有关一般的可测函数的问题化成只是有关连续函数的问题，从而得到简化。

习　　题

1．试证鲁金定理的逆定理。

即设$f(x)$为可测集 E 上几乎处处有限的函数，若对于任意 $\varepsilon>0$，有闭集 F，使 $F\subseteq E$，$m(E\setminus F)<\varepsilon$，$f(x)$在 F上是连续函数，则 $f(x)$在E上是可测函数。

2．试证鲁金定理中的条件 $mE<+\infty$，可以去掉。

3．设 $mE<+\infty$，$f(x)$是 E 上几乎处处有限的可测函数，则对于任意$\varepsilon>0$，有有界可测函数$g(x)$，使　$m\{x|f(x)\neq g(x)\}<\varepsilon$。

§6　依测度收敛

现在我们来介绍一种比几乎处处收敛更为广泛的收敛概念，即可测函数列的度量收敛或称为依测度收敛。

定义1　设 $mE<+\infty$，$\{f_n(x)\}$ 是 E 上的一列可测函数，它们都是几乎处处有限的．如果有E上的几乎处处有限的可测函数 $f(x)$，使对任意正数 σ，都有

$$\lim_{n\to\infty} m\{x \mid |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}=0$$

则称 $f_n(x)$在E上测度地逼近 $f(x)$。记为 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$。（或称依测度收敛，或称度量收敛）。

每当出现一个新概念时，人们总是要研究它与我们所熟悉的旧有概念之间的关系。下面就来考虑测度逼近与几乎处处收敛之间的关系。

定理 1 （勒贝格定理）设

(i) $mE<+\infty$;

(ii) $\{f_n(x)\}$是E上一列几乎处处取有限值的可测函数；

(iii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ P.P. 于E，且 $|f(x)|<+\infty$ P.P. 于 E。

则在E上 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$。

证明 只须证明合于定义 1 即可。我们不妨设$\{f_n(x)\}$和 $f(x)$ 为处处有限。根据已知条件显然满足叶果洛夫定理的条件，故对任意 $\varepsilon>0$，有可测子集 $e\subseteq E$，使$me<\varepsilon$，而$\{f_n(x)\}$在 $E-e$ 上一致收敛于 $f(x)$。现设 σ 是任一正数，则自然有N，使 $n\geqslant N$ 时，

$$|f_n(x)-f(x)|<\sigma \quad x\in E-e$$

因此，当 $n\geqslant N$ 时，$\{x \mid |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}\subseteq e$，所以

$$m\{x \mid |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}\leqslant me<\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知，当 $n\to\infty$ 时，有

$$m\{x \mid |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}\to 0$$

即 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$。

这个定理告诉我们：在具有有限测度的集合E上，一个可测函数列若是几乎处处收敛的则必是依测度收敛的；它表明依测度收敛要求的条件弱于几乎处处收敛条件。人们自然会问：

反之如何呢？下面的例子告诉我们，这个问题的答案是否定的.

例：在区间〔0,1）上作出一个可测函数列，它是依测度收敛的，但并不几乎处处收敛，甚至是处处不收敛的。我们分三步进行讨论。

1° 在区间〔0，1）上作一列可测函数.

取区间〔0，1）为 E，自然有 $mE<+\infty$。

在〔0，1）上定义函数：

$$f_1^{(1)}(x)=1 \quad x\in[0,1)$$

$$f_1^{(2)}(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 0 & x\in\left[\frac{1}{2},1\right),\end{cases}$$

$$f_2^{(2)}(x)=\begin{cases}0 & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 1 & x\in\left[\frac{1}{2},1\right)\end{cases}$$

一般地，将〔0,1）分为 k 等分，我们就定义第k组的第 i 个函数为

$$f_i^{(k)}(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[\frac{i-1}{k},\ \frac{i}{k}\right)\\ 0 & x\overline{\in}\left[\frac{i-1}{k},\ \frac{i}{k}\right)\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,k)$$

也就是说定义 $f_i^{(k)}(x)$ 为那样的函数，它在从左边数起的第 i 个小区间上恒等于 1，而在其它地方则恒等于 0 。

令$\varphi_1(x)=f_1^{(1)}(x)$，$\varphi_2(x)=f_1^{(2)}(x)$，$\varphi_3(x)=f_2^{(2)}(x)\cdots$ 则 $\{\varphi_n(x)\}$ 是定义在〔0，1）上处处有限的可测函数列。令 $\varphi(x)\equiv 0$。

2° 往证在 $[0, 1)$ 上，$\varphi_n(x) \Longrightarrow \varphi(x)$.

对任意 $\sigma>0$，若 $\sigma>1$，由 $\varphi_n(x)$和 $\varphi(x)$的定义，显然对任意 n，恒有

$$\{x \mid |\varphi_n(x)-\varphi(x)| \geqslant \sigma\} = \phi$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty} m\{x \mid |\varphi_n(x)-\varphi(x)| \geqslant \sigma\} = 0$$

若$\sigma \leqslant 1$，则当$\varphi_n(x)$是第 k组中第 i 个函数时，显然有

$$\{x \mid |\varphi_n(x)-\varphi(x)| \geqslant \sigma\} = \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)$$

因为由 $\varphi_n(x)$的作法知，只有在$\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)$上有

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)| = 1 \geqslant \sigma$$

而在其它各处则皆为零，故

$$m\{x \mid |\varphi_n(x)-\varphi(x)| \geqslant \sigma\} = \frac{1}{k}$$

当 $n\to\infty$ 时，显然有 $k\to\infty$，故有

$$\lim_{n\to\infty} m\{x \mid |\varphi_n(x)-\varphi(x)| \geqslant \sigma\} = 0$$

可见在 $[0, 1)$ 上 $\varphi_n(x) \Longrightarrow \varphi(x)$.

3° 往证在$[0,1)$上 $\varphi_n(x) \not\rightarrow \varphi(x)$.

实际上，对于任意 $x_0\in[0,1)$，由 $\varphi_n(x)$ 的作法可知，$\{\varphi_n(x)\}$ 中必有无限多个函数在x_0点等于1，也必有无限多个函数在 x_0 点等于0，所以 $\{\varphi_n(x_0)\}$ 不能是收敛列，这说明$\{\varphi_n(x)\}$在$[0,1)$上是处处不收敛的.

此例说明，依测度收敛是比几乎处处收敛更为广泛的一种收敛，但我们有下述定理.

定理 2 （黎斯*）若$mE<+\infty$，$f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，则$\{f_n(x)\}$

---

* Riesz

必有子列 $\{f_{n_i}(x)\}$几乎处处收敛于 $f(x)$.

先对定理的证明作一下分析。因为我们是要从$\{f_n(x)\}$中选出一个子列$\{f_{n_i}(x)\}$，使它几乎处处收敛于 $f(x)$。故由§4引理可知，这只须选出一列正整数

$$n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots$$

使

$$mD=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{i=N}^{\infty}\{x\,\big|\,|f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}\right)=0 \quad (1)$$

其中 $\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>\varepsilon_k>\cdots\to0$。由此易于看出关键在于如何选取合于要求的正整数列 $\{n_i\}$.

事实上，要使式（1）成立，也就是要使对任意的 $\varepsilon_k>0$ 都有

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{i=N}^{\infty}\{x\,\big|\,|f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}\right)=0 \qquad (2)$$

因为每个

$$\bigcup_{i=N}^{\infty}\{x\,\big|\,|f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}$$

都是可测集，所以式（2）左端是单调减少可测集列的交集的测度，且 $mE<+\infty$，于是由第三章§3定理11及其证明，则有

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{i=N}^{\infty}\{x\,\big|\,|f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}m\left(\bigcup_{i=N}^{\infty}\{x\,\big|\,|f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}\right) \quad (3)$$

于是，为使式（2）成立，只须式（3）右端极限值为零。

又因

$$m\left(\bigcup_{i=N}^{\infty}\{x \mid |f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_i\}\right)$$

$$\leqslant\sum_{i=N}^{\infty} m\{x \mid |f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\} \qquad (4)$$

所以只须证明对任意 $\varepsilon_k>0$，恒有

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=N}^{\infty} m\{x \mid |f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}=0$$

成立。为此只须证明正项级数$\sum_{i=1}^{\infty} m\{x \mid |f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}$ 收敛。

基于上述分析，我们来证明本定理如下：

证明 1° 选子列 $\{f_{n_i}(x)\}$。

设 $\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>\varepsilon_k>\cdots\to0$，又根据判别正项级数收敛的比较定理，自然会想到要取一个收敛正项级数

$$\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_i+\cdots$$

因为已知 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，即对任意 $\sigma>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} m\{x \mid |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}=0 \qquad (5)$$

于是对于 $\varepsilon_1>0$，$\eta_1>0$，显然必有正整数 n_1，使

$$m\{x \mid |f_{n_1}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_1\}\leqslant\eta_1$$

同理对 $\varepsilon_2>0$ 和 $\eta_2>0$，应有 n_2，使

$$m\{x \mid |f_{n_2}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_2\}\leqslant\eta_2$$

且可要求 $n_2>n_1$（因为假如对任意 $n>n_1$，恒有 $m\{x \mid |f_{n_2}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_2\}>\eta_2>0$，则与式（5）矛盾）。

假设对 $\varepsilon_{k-1}>0$ 和 $\eta_{k-1}>0$，已求得 n_{k-1}，使

$$m\{x \mid |f_{n_{k-1}}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_{k-1}\}\leqslant\eta_{k-1}$$

且 $n_{k-1}>n_{k-2}>\cdots>n_1$。

对 $\varepsilon_k>0$，$\eta_k>0$，仍由已给条件式（5）知，有n_k，使

$$m\{x\mid |f_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}\leqslant\eta_k$$

且 $n_k>n_{k-1}$。

于是由数学归纳法，我们取到$\{f_n(x)\}$的子列$\{f_{n_i}(x)\}$，使得对任意 ε_i，有

$$m\{x\mid |f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_i\}\leqslant\eta_i$$

2° 往证 $\{f_{n_i}(x)\}$在E上几乎处处收敛于 $f(x)$。

由证明的分析中知，只须证明对任意 $\varepsilon_k>0$，恒有

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=N}^{\infty}m\{x\mid |f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}=0$$

事实上，对任意 $\varepsilon_k>0$，只要 $i\geqslant N>k$，就有 $\varepsilon_i<\varepsilon_k$，于是有

$$\{x\mid |f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}\subseteq\{x\mid |f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_i\}$$

从而有

$$m\{x\mid |f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}\leqslant m\{x\mid |f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_i\}\leqslant\eta_i$$

故由$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\eta_i$收敛知

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=N}^{\infty}m\{x\mid |f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{i=N}^{\infty}\eta_i=0$$

于是由式（3）及式（4）知，对任意 $\varepsilon_k>0$，恒有式（2）成立，即有

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{i=N}^{\infty}\{x\mid |f_{n_i}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}\right)=0$$

于是由 $\varepsilon_k>0$ 的任意性得证式（1）成立，即

$$mD = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{i=N}^{\infty}\{x \mid |f_{n_i}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\}\right) = 0$$

因 D 是由$\{f_{n_i}(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点组成的集，从而得证$\{f_{n_i}(x)\}$在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

定理 3 设在 E 上 $f_n(x) \Longrightarrow f(x)$，$f_n(x) \Longrightarrow g(x)$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 E 上几乎处处相等.

证明 欲证 $f(x) = g(x)$ P.P 于 E，显然只须证明 $m\{x \mid f(x) \neq g(x)\} = 0$. 但由于

$$\{x \mid f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \mid |f(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{n}\}$$

故只须证，对任意自然数 n，皆有

$$m\{x \mid |f(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{n}\} = 0$$

事实上，因为

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - g(x)|$$

故对任意自然数 n，皆有

$$\{x \mid |f(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{n}\} \subseteq \{x \mid |f(x) - f_k(x)| \geqslant \frac{1}{2n}\}$$

$$\cup \{x \mid |f_k(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{2n}\}$$

从而有

$$m\{x \mid |f(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{n}\} \leqslant m\{x \mid |f(x) - f_k(x)| \geqslant \frac{1}{2n}\}$$

$$+ m\{x \mid |f_k(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{2n}\}$$

因为 $f_n(x) \Longrightarrow f(x)$ 且 $f_n(x) \Longrightarrow g(x)$，故当 $k \to \infty$ 时，上式右端趋于零，故有

$$m\{x \mid |f(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{n}\} = 0$$

从而 $m\{x|f(x)\neq g(x)\}=0$，即 $f(x)=g(x)$ P.P. 于 E。

定理 3 说明，如果把几乎处处相等的函数视作同一个函数时，则依测度收敛的函数列的极限是唯一的。

习　　题

1．若 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，$f(x)=g(x)$ P.P 于 E，则 $f_n(x)\Longrightarrow g(x)$ ．

2．若 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，　$g_n(x)\Longrightarrow g(x)$，　则 $f_n(x)+g_n(x)\Longrightarrow f(x)+g(x)$。

3．勒贝格定理在 $mE=+\infty$ 的 E 上不再成立。

4．设 $mE<+\infty$，$\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，则 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的充要条件是：对 $\{f_n(x)\}$ 的任一子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 都可以从中再找一个子序列 $\{f_{n_{k_j}}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$。

5．如果对于任意固定的 n，当 $k\to\infty$ 时，

$$f_k^{(n)}(x)\Longrightarrow f^{(n)}(x)$$

而当 $n\to\infty$ 时，是

$$f^{(n)}(x)\Longrightarrow f(x)$$

则在 $\{f^{(n)}(x)\}$ 中可以选取函数列依测度收敛于 $f(x)$。

6．一列几乎处处有限的可测函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，依测度收敛的充要条件是：对于任何正数 σ 和 ε，有如下的 N，当 $n>N$，$m>N$ 时，

$$m\{x\,|\,|f_n-f_m|\geqslant\sigma\}<\varepsilon$$

第五章　勒贝格积分

本章的基本内容是建立一种新的积分，即勒贝格积分的理论，它是实变函数论要研究的中心问题。我们知道数学分析中的黎曼积分在解决求积、重心和矩量等问题中曾起过相当重要的作用。但随着科学和工程技术的不断发展则需要新的数学工具，而黎曼积分已不能满足这种需要了。黎曼积分的主要缺陷在于它对函数连续性的过多依赖，且在有关微分、积分等极限运算中，极限次序可交换的条件也是相当苛刻的。勒贝格积分在一定程度上弥补了黎曼积分上述的不足，从而它较之黎曼积分有着更为广泛的应用。

现在，建立勒贝格积分理论已有了多种不同的方法，我们在本章里所采取的步骤和方法是与黎曼积分的建立大体相同的，这是为了便于和读者熟知的黎曼积分相对照，从而将有利于我们更好的理解和掌握勒贝格积分理论。

§1　有界函数的积分

前面说过，我们将采取与黎曼积分基本上相同的步骤和方法来建立勒贝格积分，因此我们首先回顾一下黎曼积分定义。

设 $f(x)$是R^1中区间 $[a,b]$ 上的函数。

第一步　分割 $f(x)$的定义域 $[a,b]$。

任取分法T，把 $[a,b]$ 分割为 n 个小区间

$[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n-1)$

令 $\lambda(T)=\max\{x_{i+1}-x_i\}$.

第二步　作和.

任取 $\xi_i\in[x_i, x_{i+1}]$，作和

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$

第三步　取极限

如果对任意分法T和任取 $\xi_i\in[x_i, x_{i+1}]$，恒有

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)=I$$

则称 $f(x)$在 $[a,b]$上可积，且称I为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分，记为

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

因为我们是要在一般点集上定义积分，所以在分割函数的定义域这一步骤上，已经不再是把区间分割为小区间了，而是要把一般点集分解为互不相交的子集的问题，为此，我们先给出点集的分划概念.

一、点集的分划及勒贝格大、小和

定义1　（1）设E是可测集，$E_1, E_2, \cdots, E_n$都是E的可测子集，且 $E_i\cap E_j=\phi$ $(i\neq j)$，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$，则称$E_1$，$E_2$，$\cdots$，$E_n$ 是E的一个分划，或者说等式 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ 表示 E的一个分划.

（2）设$E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$，$E=\bigcup\limits_{j=1}^{m} M_j$ 都是E的分划，则每个

E_i和任一M_j作成的所有交集 $E_i\cap M_j$，仍是E的一个分划，并称它为比前两个分划更细密的分划。

事实上，首先由于每个E_i 和任一 M_j 都可测，故所有的$E_i\cap M_j$ 都是可测集；其次对任意$E_i\cap M_j$，$E_l\cap M_r$，恒有

$$(E_i\cap M_j)\cap(E_l\cap M_r)$$
$$=(E_i\cap E_l)\cap(M_j\cap M_r)=\phi$$

再者，显然 $E\supseteq\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap M_j)$。另一方面，设$P\in E$，则由分划的定义必有$E_{i_0}$，$M_{j_0}$ 使$P\in E_{i_0}$ 且$P\in M_{j_0}$，从而有$P\in E_{i_0}\cap M_{j_0}$，于是有

$$P\in\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap E_j)，从而E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap M_j)$$

故 $$E=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap M_j)是E的分划。$$

特别值得注意的是，对每个 E_i $(i=1,2,\cdots,n)$，恒有

$$E_i=\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap M_j)$$

同理，对每个 M_j $(j=1,2,\cdots,m)$，恒有

$$M_j=\bigcup_{i=1}^{n}(E_i\cap M_j)$$

为了建立新的积分需要，我们考虑用分割函数值域做其定义域分划的方法。

设 $mE<+\infty$，$f(x)$是E上有界可测函数。因 $f(x)$ 在E上有界，故存在常数 b、B，使 $b<f(x)<B$ $(x\in E)$。比如用分点，

$$b=y_0<y_1<y_2<y_3=B$$

则把 $[b,B]$分割成三个小区间

$$[y_0,y_1]，[y_1,y_2]，[y_2,y_3]$$

令

$$E_1=\{x|y_0<f(x)\leqslant y_1\}$$
$$E_2=\{x|y_1<f(x)\leqslant y_2\}$$
$$E_3=\{x|y_2<f(x)<y_3\}$$

因为 $f(x)$ 是可测函数，所以 E_1、E_2、E_3 都是可测集，且显然有

$$E_i\cap E_j=\phi\ (i\neq j),\quad E=\bigcup_{i=1}^{3}E_i,$$

故 E_1，E_2，E_3构成E的一个分划.

依据上述方法对E作出的分划与黎曼积分定义中对定义域区间的分割，是有着明显不同的（图5—1）. 尽管E 是区

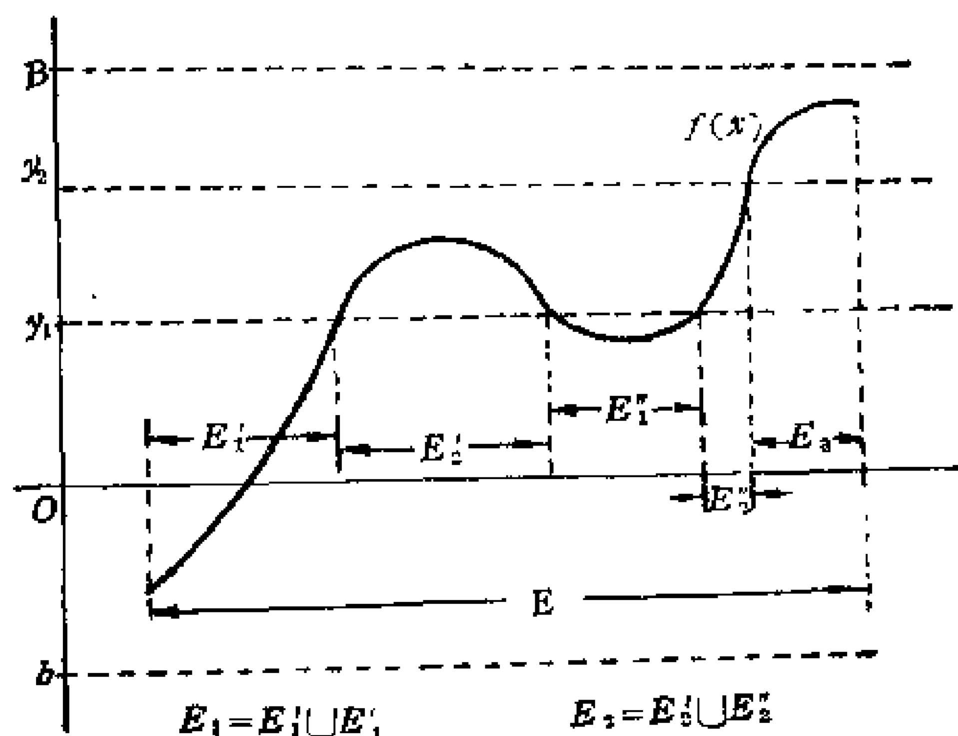


图5—1

间，它的分划中的成员即子集E_i也完全可能不是区间. 这一点从下例中会看得更清楚.

设$D(x)$是[0,1]上的迪里赫莱函数，即

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1] \text{ 是有理数时}\\ 0 & x\in[0,1] \text{ 是无理数时.}\end{cases}$$

因$D([0,1])=\{0,1\}\subsetneq[-1,\ 2]$，对$[-1,2]$取分点

$$-1=y_0<y_1=\frac{1}{2}<y_2=2$$

则

$$E_1=\{x\mid -1<D(x)\leqslant\frac{1}{2}\}=\{x\mid D(x)=0\}$$

是$[0,1]$中的无理点集，

$$E_2=\left\{x\ \middle|\ \frac{1}{2}<D(x)<2\right\}=\{x\mid D(x)=1\}$$

是$[0,1]$中的有理点集.

显然有，$mE_1=1$，$mE_2=0$，且 $E_1\cap E_2=\phi$，$[0,\ 1]=E_1\cup E_2$，故E_1，E_2是$[0,1]$的一个分划.

定义 2 设 (i) E是可测集且 $mE<+\infty$，$f(x)$ 是 E上有界函数；

(ii) b和 B 分别是 $f(x)$在 E 上的下确界和上确界，即 $b\leqslant f(x)\leqslant B$ $(x\in E)$；

(iii)对E的分划D：$E=\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n}}E_i$，设$b_i$和$B_i$分别是$f(x)$ 在E_i上的下确界和上确界 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

则分别称

$$s=\sum_{i=1}^{n}b_i mE_i,\quad S=\sum_{i=1}^{n}B_i mE_i$$

为 $f(x)$ 关于分划 D：$E=\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n}}E_i$的小和与大和.

由小和与大和的定义可知，对E的任意分划D：$\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n}}M_i$，必有

$$bmE \leqslant s \leqslant S \leqslant BmE.$$

事实上，由于 b和B分别是 $f(x)$ 在E上的下确界和上确界，b_i 和 B_i分别是 $f(x)$在E的子集 M_i $(i=1, 2, \cdots, n)$上的下确界和上确界，从而有

$$b \leqslant b_i, \qquad B_i \leqslant B \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

且由分划定义及测度完全可加性有

$$mE = m\left(\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right) = \sum_{i=1}^{n} mM_i$$

于是有

$$bmE = b\left(\sum_{i=1}^{n} mM_i\right) = \sum_{i=1}^{n} bmM_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i mM_i$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} B_i mM_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} BmM_i = B\left(\sum_{i=1}^{n} mM_i\right)$$

$$= BmE$$

而

$$s = \sum_{i=1}^{n} b_i mM_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} B_i mM_i$$

关于小和与大和有如下性质.

引理 1 设 (i) E可测且$mE < +\infty$，$f(x)$是 E上有界函数，且b，B分别是 $f(x)$在E上的下确界和上确界；

(ii) D': $E = \bigcup_{i=1}^{n} E'_i$ 是比 D: $E = \bigcup_{j=1}^{N} E_j$ 更细密的分划，且 s'、S'是关于分划 D'的小和与大和；s、S是关于分划 D的小和与大和，则有

$$s \leqslant s' \leqslant S' \leqslant S$$

证明 1° 因D'是比D更细密的分划，故由定义1知，分划 D'应是由分划D与另外一个分划 $D'': E=\bigcup_{k=1}^{L} E_k''$ "合并"而成的，即

$$D': E=\bigcup_{j=1}^{N}\bigcup_{k=1}^{L}(E_j\cap E''_k)=\bigcup_{j,k=1}^{N,L} E_{jk}$$

其中 $E_{jk}=E_j\cap E_k''$。

2° 因为E_{jk}都是 E_j的子集，所以若 b_{jk}，B_{jk}是 $f(x)$ 在 E_{jk} 上的下确界与上确界；b_j和B_j是 $f(x)$在 E_j 上的下确界与上确界，则有

$$b\leqslant b_j\leqslant b_{jk}\leqslant B_{jk}\leqslant B_j\leqslant B$$

$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ k=1,\ 2,\ \cdots L)$$

于是有

$$s'=\sum_{j,k=1}^{N,L} b_{jk}mE_{jk}=\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{L} b_{jk}mE_{jk}\right)$$

$$\geqslant\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{L} b_j mE_{jk}\right)=\sum_{j=1}^{N} b_j\left(\sum_{k=1}^{L} mE_{jk}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{N} b_j mE_j=s$$

$$S'=\sum_{j,k=1}^{N,L} B_{jk}mE_{jk}=\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{L} B_{jk}mE_{jk}\right)$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{L} B_j mE_{jk}\right)=\sum_{j=1}^{N} B_j\left(\sum_{k=1}^{L} mE_{jk}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{N} B_j mE_j=S$$

但 $s'\leqslant S'$，故有

$$s\leqslant s'\leqslant S'\leqslant S$$

如果我们把一个分划比另一分划更细密的情形，简称之为分划加细时，则引理1可简述为，当分划加细时，小和不减小，大和不增大。

引理2 任何小和总不超过任何大和。

证明 设D_1，D_2是任意二分划．s_1，S_1是D_1的小和与大和；s_2，S_2是D_2的小和与大和．D^*是由D_1，D_2"合并"成的比它们都更细密的分划，且s^*，S^*分别是D^*的小和与大和，则由引理1知，

$$s_1\leqslant s^*\leqslant S^*\leqslant S_1$$

$$s_2\leqslant s^*\leqslant S^*\leqslant S_2$$

于是有

$$s_1\leqslant s^*\leqslant S^*\leqslant S_2$$

由分划D_1，D_2的任意性，引理得证。

二、有界函数的积分

定义3 设E可测且$mE<+\infty$，$f(x)$是E上有界函数，由定义2知，对E的任意分划D，$f(x)$在E上关于D的小和s_D与大和S_D，恒有

$$bmE\leqslant s_D\leqslant S_D\leqslant BmE$$

其中b，B分别是$f(x)$在E上的下确界和上确界．因此，$f(x)$关于E的一切分划的小和与大和构成的数集都是有界的，从而它们都存在确界．令

$$\underline{\int_E} f(x)dx=\sup_D\{s_D\},\quad \overline{\int_E} f(x)dx=\inf_D\{S_D\}$$

则分别称$\underline{\int_E} f(x)dx$与$\overline{\int_E} f(x)dx$为$f(x)$在$E$上的下积分与

上积分.

由下积分与上积分定义可知：

① $bmE\leqslant\int_{-E} f(x)dx\leqslant BmE$

$$bmE\leqslant\int_{E}^{-} f(x)dx\leqslant BmE$$

② 对E的任意分划 D，s_D，S_D 是D的小和与大和，则必有

$$s_D\leqslant\int_{-E} f(x)dx,\quad \int_{E}^{-} f(x)dx\leqslant S_D$$

③ 对任意$\varepsilon>0$，必有E的分划D与 D'，使

$$\int_{-E} f(x)dx-\varepsilon<s_D\leqslant\int_{-E} f(x)dx$$

$$\int_{E}^{-} f(x)dx\leqslant S_{D'}<\int_{E}^{-} f(x)dx+\varepsilon$$

引理 3 $\int_{-E} f(x)dx\leqslant\int_{E}^{-} f(x)dx$.

证明 由下积分和上积分定义知，只须证明

$$\sup_D\{s_D\}\leqslant\inf_D\{S_D\}\qquad(1)$$

由引理 2 得知，任何小和总不超过任何大和，所以数集$\{s\}$中的任何数都不大于$\{S\}$中的任何数. 从而式（1）成立，引理得证.

定义 4 设E可测且 $mE<+\infty$，$f(x)$是E上有界函数，若

$$\int_{-E} f(x)dx=\int_{E}^{-} f(x)dx$$

则称 $f(x)$为E上有界可积函数（在勒贝格意义下）；且称上、下积分的共同值为 $f(x)$在E上的积分，记作

$$\int_E f(x)dx$$

即

$$\int_E f(x)\,dx=\underline{\int}_E f(x)\,dx=\overline{\int}_E f(x)\,dx$$

例 1　设 $mE=0$，则 E 上任何有界函数（必可测）$f(x)$ 都是有界可积的，且

$$\int_E f(x)\,dx=0$$

证明　只须证明 $\underline{\int}_E f(x)\,dx=\overline{\int}_E f(x)\,dx=0$.

事实上，因 $mE=0$，且 $f[E]\subseteq[A,\ B]$，则由大、小和定义知，对 E 的任意分划 D，恒有

$$0=AmE\leqslant s_D\leqslant S_D\leqslant BmE=0$$

从而由上、下积分定义与引理 3，有

$$0\leqslant\underline{\int}_E f(x)\,dx\leqslant\overline{\int}_E f(x)\,dx=0$$

即

$$\underline{\int}_E f(x)\,dx=\overline{\int}_E f(x)\,dx=0$$

于是由函数有界可积定义知，$f(x)$ 在 E 上可积，且 $\int_E f(x)\,dx=0$.

例 2　$[0,1]$ 上的迪里赫莱函数 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界可积，且其积分等于零.

证明　由上、下积分定义知，对 $[0,1]$ 的任意分划 D，恒有

$$s_D\leqslant\underline{\int}_{[0,1]} D(x)\,dx\leqslant\overline{\int}_{[0,1]} D(x)\,dx\leqslant S_D$$

因此，只须证明 $[0,1]$ 存在分划 D'，使

$$s_{D'}=S_{D'}=0$$

令

$$E_1=\{x|\ D(x)=0\},\quad E_2=\{x|\ D(x)=1\}$$

显然D':[0,1]$=E_1\cup E_2$是[0,1]之一分划，且$mE_1=1$，$mE_2=0$。对D'，有

$$s_{D'}=0\cdot1+1\cdot0=0=S_{D'}$$

于是有

$$0=s_{D'}\leqslant\int_{-[0,1]}D(x)dx\leqslant\int^{-}_{[0,1]}D(x)dx\leqslant S_{D'}=0$$

即

$$\int_{(0,1)}D(x)dx=\int_{-(0,1)}D(x)dx=\int^{-}_{(0,1)}D(x)dx=0$$

定理 1 $f(x)$为E上有界可积函数的充要条件是，对任意$\varepsilon>0$，恒有E的分划 D，使关于D的大和 S_D与小和 s_D 之差小于 ε。

证明 充分性 已知对任意$\varepsilon>0$，恒有分划D，使

$$0\leqslant S_D-s_D<\varepsilon$$

于是结合定义 3，有

$$\int^{-}_{E}f(x)dx\leqslant S_D<s_D+\varepsilon\leqslant\int_{-E}f(x)dx+\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$的任意性有

$$\int^{-}_{E}f(x)dx\leqslant\int_{-E}f(x)dx$$

但由引理 3 知，上述不等式的反向不等式必成立，故有

$$\int_{-E}f(x)dx=\int^{-}_{E}f(x)dx$$

即 $f(x)$在E上有界可积.

必要性 设 $f(x)$有界可积，则有

$$\int_{E}f(x)dx=\int_{-E}f(x)dx=\int^{-}_{E}f(x)dx$$

对于任意 $\varepsilon>0$，据上、下积分定义，应有分划 D_1 和 D_2，分别使

$$s_1>\int_{-E} f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2}=\int_E f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$S_2<\int_E^- f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}=\int_E f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

其中 s_1，S_2分别表示D_1的小和与D_2的大和。

现在令D表示 由D_1，D_2 “合并”而成的更细密的分划，s，S为D的小和与大和，则由引理1及引理3知

$$s_1\leqslant s\leqslant S\leqslant S_2$$

结合式（1）有

$$0\leqslant S-s\leqslant S_2-s_1<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

在第四章中我们引入了可测函数概念，并讨论了它的某些性质。从下面定理，可以看出可测函数的定义实际上是针对勒贝格积分的需要而给出的。

定理 2 设 $mE<+\infty$，则 $f(x)$是E 上有界可积函数的充要条件是，$f(x)$ 是E上有界可测函数。

证明 充分性 由定理1知，只须证明对任意 $\varepsilon>0$，恒有E的分划 D，使 $S_D-s_D<\varepsilon$。

1° 设 $b<f(x)\leqslant B$，则对任意$\delta>0$，可将〔b，B〕如此分割，使

$$b=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=B$$

$$y_i-y_{i-1}<\delta \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

令

$$E_i=\{x|y_{i-1}<f(x)\leqslant y_i\} \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

则每个E_i可测且互不相交，因此 D_0：$E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$是一个分划，

设关于D_δ的小和与大和是

$$s_{D_\delta}=\sum_{i=1}^{n} b_i mE_i,\ S_{D_\delta}=\sum_{i=1}^{n} B_i mE_i$$

显然 $y_{i-1}\leqslant b_i\leqslant B_i\leqslant y_i$,从而 $B_i-b_i<\delta$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$,所以有

$$S_{D_\delta}-s_{D_\delta}=\sum_{i=1}^{n}(B_i-b_i)mE_i<\delta\sum_{i=1}^{n} mE_i=\delta mE$$

2° 对任意$\varepsilon>0$,由 1° 知只要取$0<\eta<\frac{\varepsilon}{mE+1}$, 关于分划$D_\eta$的大和与大和,便有

$$S_{D_\eta}-s_{D_\eta}<\eta\cdot mE<\frac{\varepsilon}{mE+1}mE<\varepsilon$$

于是由定理1知$f(x)$在E上是有界可积的.

必要性 已知$f(x)$在 E上有界可积,往证$f(x)$在E上可测.为此,可用$f(x)$构造简单函数列,通过简单函数列的极限函数可测来证明$f(x)$的可测性.

1° 设$f(x)$是E上有界可积函数,则由定理1知,对每个$\frac{1}{n}>0$ $(n=1,\ 2,\cdots)$,都相应地存在分划 D_n $(n=1,2,\cdots)$,使关于D_n的小和与大和

$$s_n=\sum_{i=1}^{m_n} b_i^{(n)}mE_i^{(n)},\qquad S_n=\sum_{i=1}^{m_n} B_i^{(n)}mE_i^{(n)}$$

合于不等式

$$S_n-s_n<\frac{1}{n}\tag{1}$$

令 D_n'是“合并” $D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_n$ 而成的分划,则D_n'比

$D_1, D_2, \cdots, D_n$ 都更细密，且由引理1及式（1）知，D_n' 的小和与大和仍然满足

$$S_n' - s_n' < \frac{1}{n}$$

所以我们完全可以要求上述的一列分划，是一个比一个更细密（如令 $D_1' = D_1$，$D_2' = D_1'$与D_2合并，$D_3' = D_2'$与 D_3 合并，以下类推）的。

2° 在每个分划D_n上作简单函数如下：

$$B_n(x) = B_i^{(n)}, \quad b_n(x) = b_i^{(n)} \text{ 当} x \in E_i^{(n)} \text{时}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m_n; \ n = 1, 2, \cdots)$$

因 $B_n(x)$、$b_n(x)$ 都是简单函数， 故都是有界可测的，并且由于分划一个比一个更细密，则显然有

$$B_1(x) \geqslant B_2(x) \geqslant \cdots \geqslant B_n(x) \geqslant \cdots \geqslant b$$

$$b_1(x) \leqslant b_2(x) \leqslant \cdots \leqslant b_n(x) \leqslant \cdots \leqslant B$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(x)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(x)$ 都存在，令

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} B_n(x), \quad h(x) = \lim_{n\to\infty} b_n(x)$$

则由第四章§3定理6知 $g(x)$和 $h(x)$ 都是有界可测函数，且显然有

$$b \leqslant h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant B \tag{2}$$

3° 由2°中式（2）知，如能证得 $h(x) = g(x)$ $P.P.$ 于 E，则 $f(x) = g(x)$ $P.P.$于 E。于是由第四章§3的习题3及$g(x)$的可测性即得证 $f(x)$可测。

事实上，假设 $h(x)$ 与 $g(x)$ 不是几乎处处相等的，则应有某个 $\varepsilon_0 > 0$，使

$$mE_{\varepsilon_0} = m\{x \mid g(x) - h(x) \geqslant \varepsilon_0\} = \delta > 0$$

因为 $B_n(x) \geqslant g(x)$，$b_n(x) \leqslant h(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$，则在 E_{ε_0}上更应该有

$$B_n(x)-b_n(x)\geqslant\varepsilon_0\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

从而有

$$S_n-s_n=\sum_{i=1}^{m_n}(B_i^{(n)}-b_i^{(n)})mE_i^{(n)}\geqslant\sum_{i=1}^{m_n}(B_i^{(n)}-b_i^{(n)})m(E_{\varepsilon_0}\cap E_i^{(n)})$$

$$\geqslant\varepsilon_0\sum_{i=1}^{m_n}m(E_{\varepsilon_0}\cap E_i^{(n)})=\varepsilon_0 mE_{\varepsilon_0}=\varepsilon_0\delta \qquad (3)$$

因为 $\varepsilon_0\delta$是大于零的定数，故式（3）矛盾于

$$S_n-s_n<\frac{1}{n}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

于是得证 $h(x)=g(x)$ P.P. 于E，从而 $f(x)$在E上可测.

定理3 设 $mE<+\infty$，$\varphi(x)$是E上非负有界可测函数. $G(E;\ \varphi)$是 $\varphi(x)$在 E上的下方图形，则

$$\int_E\varphi(x)dx=mG(E;\ \varphi)$$

我们用定理2中证明必要性的方法及其某些结果来证明此定理.

证明 1° 因 $\varphi(x)$在 E上有界（非负）可测，故 $\varphi(x)$在E上有界可积，于是对$\frac{1}{n}>0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，应有一列一个比一个更细密的分划，

$$D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_n,\ \cdots$$

使关于D_n的小和与大和

$$s_n=\sum_{i=1}^{m_n}b_i^{(n)}mE_i^{(n)},\quad S_n=\sum_{i=1}^{m_n}B_i^{(n)}mE_i^{(n)}$$

合于

$$S_n-s_n<\frac{1}{n}\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

又因 $s_n \leqslant \int_E \varphi(x)\,dx \leqslant S_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$

故有 $0 \leqslant \int_E \varphi(x)\,dx - s_n \leqslant S_n - s_n < \frac{1}{n}$

从而

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_E \varphi(x)\,dx \tag{1}$$

2° 在每个分划D_n上作简单函数：

$b_n(x) = b_i^{(n)}, \qquad x \in E_i^{(n)}$

$(i=1,\ 2,\ \cdots m_n;\ n=1,\ 2,\cdots)$

因 $f(x)$非负，故每个简单函数 $b_n(x)$皆非负，且

$$0 \leqslant b_1(x) \leqslant b_2(x) \leqslant \cdots \leqslant b_n(x) \leqslant \cdots \leqslant \varphi(x) \tag{2}$$

设 $E_0 = \{x \mid b_n(x) \not\to \varphi(x)\}$，由于在定理 2 必要性证明中已知

$$\lim_{n\to\infty} b_n(x) = h(x) = \varphi(x)\ P.P.\ \text{于}\ E$$

故有 $mE_0 = 0$，因此有

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{i=1}^{m_n} b_i^{(n)} mE_i^{(n)} &= mG(E;\ b_n) \\ &= mG(E-E_0;\ b_n) + mG(E_0;\ b_n) \\ &= mG(E-E_0;\ b_n) \end{aligned} \tag{3}$$

$(mE_0 = 0$，故 $mG(E_0;\ b_n) = 0)$

3° 由式（2）及当$x \in E - E_0$时有

$$\lim_{n\to\infty} b_n(x) = \varphi(x)\text{，故}G(E-E_0;\ \varphi) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G(E-E_0;\ b_n)\text{.}$$

再由式（2），有

$$G(E-E_0;\ b_1) \subseteq G(E-E_0;\ b_2) \subseteq \cdots \subseteq$$

$$G(E-E_0;\ b_n) \subseteq \cdots\cdots$$

于是上述点集列合于第三章§3定理10条件，从而有

$$mG(E-E_0;\varphi)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G(E-E_0;\ b_n)\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty} mG(E-E_0;\ b_n) \qquad (4)$$

于是结合式（1）、式（3）及式（4），有

$$\int_E\varphi(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}mG(E-E_0;b_n)$$
$$=mG(E-E_0;\varphi)=mG(E-E_0;\ \varphi)+mG(E_0;\ \varphi)$$
$$=mG(E;\varphi).$$

定理 4 设 $f(x)$，$g(x)$都是E上有界可积函数，则$f(x)\pm g(x)$；$f(x)\cdot g(x)$也都是E上有界可积函数。

证明 由可测函数性质及定理 2 即得。

习 题

1 试用定义证明，若E是$[a,b]$上的可测集，则它的特征函数$X_E(x)$在集E上勒贝格可积，并且它的积分值等于集合E的测度，即

$$(L)\int_a^b X_E(x)\,dx=\int_E X_E(x)\,dx=mE$$

2 若有界函数$f(x)$在集E上为勒贝格可积，则函数$[f(x)]^2$，$|f(x)|$，$\frac{1}{f(x)}$在此集上是否亦勒贝格可积？

3 证明$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处有导数，且导数在$[a,b]$上有界，则它的导函数在$[a,b]$上为勒贝格可积函数。

§2 勒贝格积分与黎曼(Riemann)积分的关系

在数学分析中，我们学过黎曼积分，在上一节中我们又对

有界函数定义了一种新的积分，即勒贝格积分，因此我们自然需要弄清楚这两种积分之间的关系。为简明起见，我们仅就实直线R^1中闭区间上有界函数来讨论这一问题。

定理 如果有界函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上黎曼可积，则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上也必是勒贝格可积的，且此二者的积分值相等。

证明 1° 通过§1中的讨论可以看出，黎曼积分定义与勒贝格积分定义大体上是相似的。仅从分解 $f(x)$的定义域$[a,b]$角度来看，其区别之点在于前者所考虑的分划只是将原来的区间分解为有限多个小区间，而后者的分划则允许将 $[a,b]$分解为有限多个互不相交的可测子集。显然前者的分划必是后者的分划， 而后者的分划未必是前者的分划。 因此黎曼意义下的大、小和必是勒贝格意义下的大、小和。

2° 用T 表示黎曼积分定义中 $[a,b]$的分划，象通常的作法那样，用 $\Delta x_i(i=1, 2, \cdots, n)$同时表示在分划$T$ 下的小区间及其长度（测度），用

$$s_T=\sum_{i=1}^{n} b_i\Delta x_i, \qquad S_T=\sum_{i=1}^{n} B_i\Delta x_i$$

分别表示 $f(x)$ 关于分划T在黎曼意义下的小和与大和。并分别用

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup_T\{s_T\}, \quad (R)\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf_T\{S_T\}$$

表示 $f(x)$在$[a,b]$上黎曼意义下的下积分与上积分。则由上、下确界的性质有

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)dx\leqslant \underline{\int_{[a,b]}} f(x)dx\leqslant\overline{\int_{[a,b]}} f(x)dx$$

$$\leqslant (R)\overline{\int_a^b} f(x)dx \qquad (1)$$

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，即其黎曼积分存在，则式（1）首尾两项相等，从而式（1）中的四项皆相等．定理得证．

以后为书写方便计，$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的勒贝格积分，有时也记为：

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

我们知道 $[0,1]$ 上迪里赫莱函数 $D(x)$ 不是黎曼可积的，但由§1例2知它是勒贝格可积的，且其积分值为零．由上述定理和这一例子说明勒贝格积分确实较之黎曼积分为广．这是新积分的优点之一．但不止于此，其它方面的优越性将在以后各节中反映出来．

习　　题

设 $f(x)$ 是 E 上的有界可测函数，问是否对于任意的 $\varepsilon>0$，恒有 $\delta>0$，使当分划 D 满足条件 $\max\{mE_1, mE_2, \cdots, mE_n\}<\delta$ 时，就有上积分，与大和 $S(D,f)$ 之差的绝对值满足：

$$\left|\overline{\int_E} f(x)\,dx - S(D,f)\right|<\varepsilon$$

（即问黎曼积分理论中的达布（Darboux）定理对勒贝格积分是否仍成立？）

§3　积分的一些初等性质

为简便起见，在这一节里我们总假定 E 是一个测度有限的可测集，且 $f(x)$，$g(x)$ 皆是 E 上的有界可测函数，所以根据§1定理2知

$$\int f(x)dx, \qquad \int_E g(x)\,dx$$

都是有意义的，故在下面各定理中不再重述上述事实.

定理 1 （积分平均值定理）设 c和d是二实数，且$c\leqslant f(x)\leqslant d$ $(x\in E)$，则有

$$cmE\leqslant\int_E f(x)dx\leqslant dmE$$

证明 设 b, B分别为 $f(x)$在 E上的下确界和上确界，于是有

$$c\leqslant b\leqslant f(x)\leqslant B\leqslant d \qquad (x\in E)$$

于是由§1中上、下积分的定义及积分的定义，有

$$cmE\leqslant bmE\leqslant\int_{-E} f(x)dx=\int_E f(x)dx=\overline{\int_E} f(x)dx$$

$$\leqslant bmE\leqslant dmE$$

定理得证.

由定理1立即可得下述结果

推论 1 （1）若 $mE=0$，则有

$$\int_E f(x)dx=0$$

（2）若 $f(x)\equiv c$，则有

$$\int_E f(x)dx=cmE$$

（3）若 $f(x)\geqslant 0$ $(f(x)\leqslant 0)$，则有

$$\int_E f(x)dx\geqslant 0 \quad \left(\int_E f(x)dx\leqslant 0\right)$$

定理 2 （积分的有限可加性）设D：

$$E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i \text{ 是 } E\text{ 之一分划，则}$$

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(x)\,dx$$

证明 1° 因D是分划，故 $E_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 都是可测集，且$E_i \cap E_j = \phi$ $(i \neq j)$；又因$f(x)$是E上有界可测函数，故对每个 E_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\int_{E_i} f(x)\,dx$ 都有意义。

今先就$n=2$情形证之，即 $E=E_1 \cup E_2$ 是E之分划，往证

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx \qquad (1)$$

左≤右. 对任意$\varepsilon>0$，则由上积分及积分定义知，应有E_1的分划D_1 和 E_2的分划 D_2，使得

$$S(D_1,\ f) < \overline{\int}_{E_1} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} = \int_{E_2} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

$$S(D_2,\ f) < \overline{\int}_{E_2} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} = \int_{E_1} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

其中 $S(D_j,\ f)$表示$f(x)$在 E_j上关于它的分划D_j的大和($j=1,\ 2$)。

令D表示用分划 D_1和 D_2 的所有成员组成的子集族，显然D是E的一个分划. 用 $S(D,\ f)$表示 $f(x)$ 关于E 的分划D的大和，则有

$$S(D,f) = S(D_1,\ f) + S(D_2,\ f)$$

所以由式（2）有

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant S(D,f) = S(D_1,f) + S(D_2,f)$$

$$< \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx + \varepsilon$$

由$\varepsilon>0$的任意性得

$$\overline{\int}_E f(x)\,dx \leqslant \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx$$

左≥右. 对任意 $\varepsilon>0$, 用完全类似于前一部分的证明方法（用下积分及积分定义取小和），可得

$$\int_E f(x)dx>\int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx-\varepsilon$$

从而得

$$\int_E f(x)dx\geqslant\int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx$$

综上得证式（1）成立。

2° 用数学归纳法，在1°基础上，假设$n=k$时定理成立，往证$n=k+1$ 时定理也成立.

设 $E=\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i$ 是E的一个分划. 令 $E^*=\bigcup_{i=1}^{k} E_i$（显然它是$E^*$的分划）则$E=E^*\cup E_{k+1}$ 是E之分划， 于是由1°有

$$\int_E f(x)dx=\int_{E^*} f(x)dx+\int_{E_{k+1}} f(x)dx$$

但由假设知

$$\int_{E^*} f(x)dx=\sum_{i=1}^{k}\int_{E_i} f(x)dx$$

从而有

$$\int_E f(x)dx=\sum_{i=1}^{k+1}\int_{E_i} f(x)dx$$

于是由数学归纳法知，对任意自然数 n定理成立.

例 1 设$h(x)$是定义在康托集F上的特征函数，即

$$h(x)=\begin{cases}1 & x\in F \text{ 时}\\ 0 & x\in G_0=[0,1]-F\text{时}\end{cases}$$

则 $$\int_{[0,1]} h(x)dx=0$$

证明 由第三章§1的例 1 和例 3 知， $mG_0=1$，$mF=0$.

且 $[0,1]=F\cup G_0$是$[0,1]$之一分划. 另外，显然$h(x)$是$[0,1]$上有界可测函数，从而积分存在且由定理 2 知有

$$\int_{[0,1]} h(x)dx=\int_F h(x)dx+\int_{G_0} h(x)dx$$

但由推论 1 有

$$\int_F h(x)dx=0,\qquad \int_{G_0} h(x)dx=0\cdot mG_0=0$$

从而

$$\int_{[0,1]} h(x)dx=0$$

定理 3 $\int_E[f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx$

证明 首先由§1定理 4 知$f(x)+g(x)$在E上有界可积. 次证等式成立：

左$\leqslant$右 对任意$\varepsilon>0$，显然应有分划 D_1和D_2 分别使

$$S(D_1,f)<\int_E f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2},\quad S(D_2,g)<\int_E g(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}$$

令D'表示由"合并" D_1,D_2 而成的更细密的分划，则有

$$\int_E[f(x)+g(x)]dx\leqslant S(D',f+g)\leqslant S(D',f)+S(D',g)$$

$$\leqslant S(D_1,f)+S(D_2,g)<\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

由 $\varepsilon>0$任意性，有

$$\int_E[f(x)+g(x)]dx\leqslant\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx$$

左$\geqslant$右. 把上述证法用于小和可得相反的不等式. 从而定理得证.

定理 4 对任意实数 c，恒有

$$\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx\tag{1}$$

证明 对任意实数c，显然 $cf(x)$仍是E上有界可测函数，从而 $cf(x)$必在E上有界可积，故只须证等式（1）成立.

1° 若 $c=0$ 显然式（1） 成立. 今设 $c>0$, $D:E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 是E之一分划； b_i, B_i分别是 $f(x)$ 在$E_i(i=1,2,\cdots,n)$上的下确界和上确界，且 $s(D,f)$，$S(D,f)$ 分别是 $f(x)$关于D的小和与大和，$s(D,cf)$，$S(D, cf)$ 分别是$cf(x)$ 关于D的小和与大和，则显然有

$$s(D, cf)=\sum_{i=1}^{n} cb_i mE_i=c\sum_{i=1}^{n} b_i mE_i=cs(D,f)$$

$$S(D,cf)=\sum_{i=1}^{n} cB_i mE_i=c\sum_{i=1}^{n} B_i mE_i=cS(D,f)$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_{-E} cf(x)dx&=\sup\{s(D,cf)\}=\sup\{cs(D,f)\}\\&=c\sup\{s(D,f)\}=c\int_{-E} f(x)dx=c\int_E f(x)dx\\&=c\int_E^{-} f(x)dx=c\inf\{S(D,f)\}=\inf\{cS(D,f)\}\\&=\inf\{S(D, cf)\}=\int_E^{-} cf(x)dx\end{aligned}$$

从而得证式（1）成立.

2° 设$c<0$，则由

$$0=\int_E (cf(x)+(-c)f(x))dx=\int_E cf(x)dx+(-c)\cdot\int_E f(x)dx$$

得证式（1）成立.

综上定理证毕。

定理 5 （积分单调性）若 $f(x)\geqslant g(x)$，则

$$\int_E f(x)dx\geqslant\int_E g(x)dx$$

证明 令 $\varphi(x)=f(x)+(-g(x))\geqslant 0$。于是由定理 4 及定理 3 知 $\varphi(x)$ 在 E 上有界可积，且由推论 1，有

$$0\leqslant\int_E \varphi(x)dx=\int_E [f(x)+(-g(x))]dx$$

$$=\int_E f(x)dx-\int_E g(x)dx$$

从而

$$\int_E f(x)dx\geqslant\int_E g(x)dx$$

推论 2

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E |f(x)|dx.$$

证明 因 $f(x)$ 在 E 上有界可测，由第四章§3 定理 4 知 $|f(x)|$ 也在 E 上有界可测，故必有界可积。

由于

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|\quad(x\in E)$$

于是由定理 5 有，

$$-\int_E|f(x)|dx\leqslant\int_E f(x)dx\leqslant\int_E|f(x)|dx$$

从而有

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E|f(x)|dx$$

定理 6

（1）若 $f(x)=g(x)$ $P.P.$ 于 E，则 $\int_E f(x)dx$
$=\int g(x)dx$；

（2）若 $f(x)\geqslant 0$，$\int_E f(x)dx=0$，则 $f(x)=0$ P.P. 于 E。

证明（1）：令 $M=\{x\mid f(x)\neq g(x)\}$，则 $E-M=\{x\mid f(x)=g(x)\}$，且显然$E=(E-M)\cup M$是E之分划，$mM=0$。于是有

$$\int_E [f(x)-g(x)]\,dx=\int_{E-M}[f(x)-g(x)]dx+$$

$$+\int_M [f(x)-g(x)]dx$$

因为 $f(x)-g(x)\equiv 0$ $(x\in E-M)$，$mM=0$，从而由推论1有

$$\int_{E-M}[f(x)-g(x)]dx=0,\quad \int_M [f(x)-g(x)]dx=0$$

故有

$$0=\int_E [f(x)-g(x)]dx=\int_E f(x)dx-\int_E g(x)dx$$

即

$$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx$$

（2）只须证明 $m\{x\mid f(x)\neq 0\}=0$。

事实上，设 $B=\sup\limits_{x\in E}\{f(x)\}$，因 $f(x)\geqslant 0$ $(x\in E)$，故 $B\geqslant 0$。不妨设$B>0$，令

$$E_n=\left\{x\left|\frac{B}{n+1}<f(x)\leqslant\frac{B}{n}\right.\right\}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

则E_1，E_2，…，E_n… 是一列互不相交的可测集合，且$\{x\mid f(x)\neq 0\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，于是由定理1及2有

$$\frac{B}{n+1}(mE_n)\leqslant\int_{E_n}f(x)dx\leqslant\int_E f(x)dx=0\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

从而

$$mE_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

于是

$$m\{x | f(x) \neq 0\} = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} mE_n = 0$$

即 $f(x) = 0$ P.P. 于 E

例 2 试计算〔0,1〕上函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \text{ 为无理数} \\ 0 & x \text{ 为有理数} \end{cases}$$

的积分值。

解 显然 $f(x)$ 是〔0,1〕上有界可测函数故有界可积. 设 $g(x) = e^x$ 是〔0,1〕上函数，则 $g(x)$ 有界可测，$f(x) = g(x)$ P.P. 于〔0,1〕于是由定理 6 有

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = \int_{[0,1]} g(x) dx = \int_{[0,1]} e^x dx$$

但 e^x 在〔0,1〕上是黎曼可积的，故由§2定理知

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = \int_{[0,1]} e^x dx = (R)\int_0^1 e^x dx = e - 1$$

定理 7 设 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$，且 $G(E; f^+)$，$G(E; f^-)$ 分别是 $f^+(x)$，$f^-(x)$ 在 E 上的下方图形，则

$$\int_E f(x) dx = mG(E; f^+) - mG(E; f^-)$$

证明 因 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$，于是由定理 3 、 4 及§1定理 3，有

$$\int_E f(x) dx = \int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx = mG(E; f^+) - mG(E; f^-).$$

习　　题

1　设

$$f(x)=\begin{cases}\sin\pi x & x\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right)\setminus F\\ \cos\pi x & x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\setminus F\\ x^2 & x\in F\end{cases}$$

其中F为康托完备集。

试计算

$$(L)\int_0^1 f(x)dx$$

2　试证：若$f_n(x)\geqslant 0$且$\int_E f_n(x)dx\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$，则

$$f_n(x)\Longrightarrow 0$$

3　试证：若

$$\int_E\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$$

则　$f_n(x)\Longrightarrow 0$

§4　一般函数的积分

在前几节中，我们讨论了有界函数的勒贝格积分，现在我们要就一般函数（可以是无界的）来进行讨论，但仍假设函数的定义域是测度有限的可测集合。

由于$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，而$f^+(x)$，$f^-(x)$都是非负函数，因之我们自然会想到讨论一般函数的问题宜从非负的一般函数入手，并且要设法把非负函数转化为有界函数来进行研究。因此，我们对一般函数的讨论将分两步进行，首先考虑一

般非负函数的积分问题.

一、一般非负函数的积分

设 $mE<+\infty$，$f(x)$是E上非负函数，对任意自然数n，令

$$\{f(x)\}_n=\begin{cases} f(x) & \text{当 } f(x)\leqslant n \text{ 时} \\ n & \text{当 } f(x)>n \text{ 时} \end{cases}$$

我们称 $\{f(x)\}_n$为 $f(x)$的 n——截断函数或简称之为截断函数.

由截断函数的定义显然有

① 对任意自然数n，$\{f(x)\}_n$都是E 上非负有界函数.

② 截断函数列是单调不减的，即

$$\{f(x)\}_1\leqslant\{f(x)\}_2\leqslant\cdots\leqslant\{f(x)\}_n\leqslant\cdots\cdots$$

特别地有

$$\lim_{n\to\infty}\{f(x)\}_n=f(x)\quad(x\in E)$$

引理 1 设 $mE<+\infty$，若 $f(x)$是 E上非负可测函数. 则$\{f(x)\}_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是E 上非负有界可测函数.

证明 对任意自然数 n，$\{f(x)\}_n$ 的非负有界性是显然的，故只须证其可测性. 为此只须证明对任意实数 a，点集

$$\{x|\{f(x)\}_n>a\}$$

恒为可测集.

事实上，对任意实数 a，恒有

$$\{x|\{f(x)\}_n>a\}=\begin{cases}\{x|f(x)>a\} & \text{当 } a<n \text{ 时} \\ \phi & \text{当 } a\geqslant n \text{ 时}\end{cases}$$

上式右端皆是可测集，故

$$\{x|\{f(x)\}_n>a\}$$

是可测集.

由引理 1 知当 $f(x)$ 在E上非负可测时，则其每个截断函

数 $\{f(x)\}_n$ （$n=1, 2, \cdots$） 都必是E上有界可测函数，从而都是有界可积的（积分值$\geqslant 0$），且由截断函数列的单调不减性知，必有

$$\int_E \{f(x)\}_1 dx \leqslant \int_E \{f(x)\}_2 dx \leqslant \cdots \leqslant \int_E \{f(x)\}_n dx < \cdots$$

因此，下面的极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \{f(x)\}_n dx$$

总是存在的（可能为$+\infty$）。

定义 1 设 $mE<+\infty$，$f(x)$ 是E 上非负函数，如果对任意自然数n，$\{f(x)\}_n$都是有界可积函数，则称 $f(x)$在 E 上**有非负积分值**（简称有积分值），其值为

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E \{f(x)\}_n dx$$

特别地，当积分值有限时，则称 $f(x)$ 为E上**非负可积函数**（或称 $f(x)$在E上非负可积）。

由定义 1 及引理 1 可知，若 $f(x)$ 在 E 上非负可测，则$f(x)$在E上必存在积分值，且其积分值是非负的。

例 1 计算函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$在〔1，2〕上的积分值。

解 显然 $f(x)$是〔1，2〕上的非负函数（图5—2）。作截断函数：

$$\{f(x)\}_n = \begin{cases} n & \text{当} 1\leqslant x < 1+\dfrac{1}{n^3}\text{时} \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} & \text{当 } 1+\dfrac{1}{n^3}\leqslant x\leqslant 2\text{时} \end{cases}$$

显然对每个 $\{f(x)\}_n$ 都是黎曼可积的，从而皆勒贝格可积，且有

$$\int_{[1,2]}\{f(x)\}_n dx$$

$$= (R)\int_1^{1+\frac{1}{n^3}} n dx$$

$$+ (R)\int_{1+\frac{1}{n^3}}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$= \left[n\left(1+\frac{1}{n^3}\right)-n\right]$$

$$+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2n^2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}$$

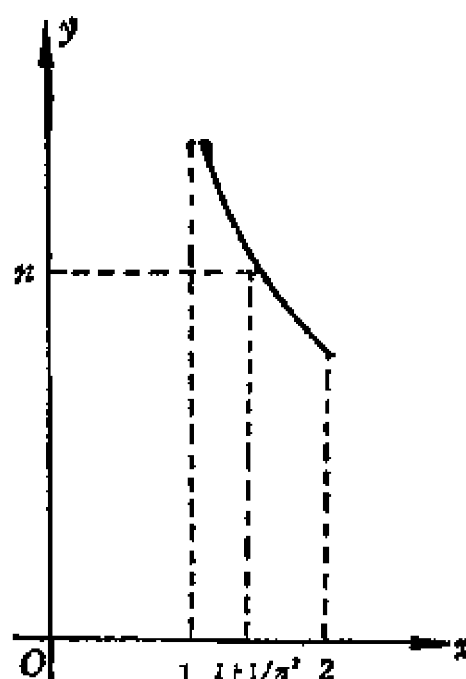


图 5 — 2

于是有

$$\int_{[1,2]} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{[1,2]}\{f(x)\}_n dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{3}{2}$$

由定义 1 知 $f(x)$ 非负可积，且其积分值为$\frac{3}{2}$。

定理 1　E 上非负函数 $f(x)$ 有积分值的充要条件是 $f(x)$ 非负可测；$f(x)$ 的积分值等于 $f(x)$ 在 E 上的下方图形的测度，即

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_E \{f(x)\}_n dx = mG(E;f)$$

$f(x)$ 非负可积的充要条件是它的下方图形的测度是有限的。

证明　1° 必要性已知非负函数 $f(x)$ 在 E 上有积分值。于是由定义 1 知，$\{f(x)\}_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是 E 上非负有界可积函数，从而由§1定理 2 知 $\{f(x)\}_n(n=1,2,\cdots)$ 都是 E 上非负有界可测函数，且

$$\lim_{n\to\infty}\{f(x)\}_n=f(x) \tag{1}$$

于是由第四章§3定理 6 知 $f(x)$是 E上非负可测函数。充分性这是明显的。

2° 由式（1）知有

$$G(E;f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}G(E;\{f\}_n)$$

且因 $\{f(x)\}_n\leqslant\{f(x)\}_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，而有

$$G(E;\ \{f_n\})\subseteq G(E;\ \{f\}_{n+1})\qquad (n=1,\ 2,\cdots)$$

于是由第三章§3定理10，有

$$\lim_{n\to\infty} mG(E;\ \{f\}_n)=mG(E;\ f) \tag{2}$$

又由§1定理 3，有

$$\int_E\{f(x)\}_n dx=mG(E;\ \{f\}_n)\qquad (n=1,\ 2,\cdots)$$

故得

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E\{f(x)\}_n dx=\lim_{n\to\infty} mG(E;\ \{f\}_n)$$
$$=mG(E;f)$$

由上述最后的等式及非负可积定义可知，$f(x)$非负可积的充要条件是 $mG(E;f)<+\infty$。

推论 1 设 $f(x)$，$g(x)$皆是E上非负可测函数，且$f(x)\leqslant g(x)$ $(x\in E)$，则

$$\int_E f(x)dx\leqslant\int_E g(x)dx$$

证明 由条件及定理 1 知$\int_E f(x)dx$，$\int_E g(x)dx$ 都存在。又因 $f(x)\leqslant g(x)$，显然对任意自然数 n，有

$$\int_E\{f(x)\}_n dx\leqslant\int_E\{g(x)\}_n dx$$

从而由定义 1 知推论成立。

二、一般函数的积分

对于一般的函数 $f(x)$. 我们把它转化为一般非负函数来讨论. 因此我们仍定义

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x) & \text{当 } f(x)>0 \text{时} \\ 0 & \text{当 } f(x)\leqslant 0 \text{时} \end{cases}$$

$$f^-(x)=\begin{cases} -f(x) & \text{当 } f(x)<0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } f(x)\geqslant 0 \text{ 时} \end{cases}$$

定义 2 设$mE<+\infty$, $f(x)$为 E上函数, 如果 $f^+(x)$及 $f^-(x)$都在E上有（非负）积分值, 且不同时为无限大, 则称 $f(x)$在 E上**有积分值且其值为**

$$\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx$$

特别地, 如果 $f^+(x)$和 $f^-(x)$的积分值皆为有限时, 则称 $f(x)$是E上可积函数.

由定义 2 可知,

① 如果 $f(x)$有积分值, 则由定义知非负函数 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$都有积分值且其值不能同时为无限大, 因此由定理 1 可知 $f^+(x)$, $f^-(x)$ 的下方图形必皆可测且其测度不能同时为无限大; 同理, 当 $f(x)$可积时, 显然上述两个下方图形的测度必都是有限的.

② 如果 $f(x)$有积分值, 则 $f^+(x)$ 和$f^-(x)$都有积分值, 仍由定理 1 知二者都可测, 故 $f(x)$可测. 所以 $f(x)$有积分值的必要条件是 $f(x)$ 可测, 但它不是 $f(x)$ 有积分值的充分条件, 因为这不能保证 $f^+(x)$,$f^-(x)$的积分值不同时为无穷大.

③ 对有界函数来说, §1的定义 4 与这里的定义 2 是一致

的，故本节定义 2 是§1定义 4 有界情形的扩充。

对于非负函数，定义 1 和定义 2 是一致的。

下面我们来讨论一般函数积分的基本性质

定理 2 若 $mE=0$，则 E 上的任何函数 $f(x)$ 都是可积的，且 $\int_E f(x)dx=0$。

证明 因 $mE=0$，所以 E 上函数 $f(x)$ 总是可测的，且对任意 n，恒有

$$\int_E \{f^+(x)\}_n dx=\int_E \{f^-(x)\}_n dx=0$$

从而有

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E \{f^+(x)\}_n dx-\lim_{n\to\infty}\int_E \{f^-(x)\}_n dx$$

$$=0$$

定理 3 若 $f(x)$ 分别是 E_1 和 E_2 上的可积函数，$E_1\cap E_2=\phi$，则 $f(x)$ 必是 $E_1\cup E_2$ 上的可积函数，且

$$\int_{E_1\cup E_2} f(x)dx=\int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx \qquad (1)$$

证明 1° 因 $f(x)$ 分别在 E_1 和 E_2 上可积，故 $mE_1<+\infty$，$mE_2<+\infty$，从而 $m(E_1\cup E_2)<+\infty$。且若 $f(x)$ 分别在 E_1 和 E_2 上为有界可积时，则 $f(x)$ 分别在 E_1 和 E_2 上皆有界可测，从而 $f(x)$ 是 $E_1\cup E_2$ 上有界可测函数，于是 $f(x)$ 在 $E_1\cup E_2$ 上有界可积，由§3定理 2 知式（1）成立。

2° 若 $f(x)$ 分别是 E_1 和 E_2 上的非负可积函数，则由定义 1 知，每个 $\{f(x)\}_n$ 都分别是 E_1 和 E_2 上的有界可积函数，从而每个 $\{f(x)\}_n$ 皆在 $E_1\cup E_2$ 上有界可积，且有

$$\int_{E_1\cup E_2}\{f(x)\}_n dx=\int_{E_1}\{f(x)\}_n dx+\int_{E_2}\{f(x)\}_n dx$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

又因

$$\int_{E_1\cup E_2} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{E_1\cup E_2}\{f(x)\}_n dx=\lim_{n\to\infty}\int_{E_1}\{f(x)\}_n dx$$

$$+\lim_{n\to\infty}\int_{E_2}\{f(x)\}_n dx=\int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx<+\infty$$

所以 $f(x)$在 $E_1\cup E_2$上可积，且式（1）成立。

3° 设 $f(x)$分别是E_1和 E_2上的一般可积函数，则由2°知有

$$\int_{E_1\cup E_2} f^+(x)dx=\int_{E_1} f^+(x)dx+\int_{E_2} f^+(x)dx$$

$$\int_{E_1\cup E_2} f(x)dx=\int_{E_1} f^-(x)dx+\int_{E_2} f^-(x)dx$$

上述两式相减，结合定义 2 即得。

定理 4 若 $f(x)$ 在E上可积，E_0 是E 的可测子集，则 $f(x)$在E_0上也可积。

证明 留给读者。

推论 2 设 $E=E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2=\phi$，E_1，E_2 都是可测集，则当 $f(x)$在E 上可积时，$f(x)$ 必在E_1和 E_2 上也都可积，且有

$$\int_E f(x)dx=\int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx \qquad (1)$$

证明 由定理 4 知 $f(x)$在E_1和 E_2上都可积，从而由定理 3 得知等式（1）成立。

定理 5 设

(i) $f(x)=g(x)$ P.P.于 E，

(ii) $g(x)$在 E上可积。

则 $f(x)$在 E上也可积，且有

$$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx$$

证明 令

$$E_1=\{x|f(x)\neq g(x)\}$$

则 $mE_1=0$，从而由推论 2 及定理 2，显然有

$$\int_E g(x)dx=\int_{E-E_1} g(x)dx+\int_{E_1} g(x)dx=\int_{E-E_1} g(x)dx$$

$$=\int_{E-E_1} f(x)dx=\int_{E-E_1} f(x)dx+\int_{E_1} f(x)dx=\int_E f(x)dx$$

这个定理告诉我们在零集（即测度为零的集）上改变函数值，既不影响函数的可积性也不影响它的积分值，即使在零集上 $f(x)$ 无定义也可以。

定理 6 若 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $f(x)$ 在 E 上必几乎处处有限。

证明 令

$$E_1=\{x|f(x)=+\infty\},\quad E_2=\{x|f(x)=-\infty\}$$

只须证明 $mE_1=mE_2=0$。

今证 $mE_1=0$。用反证法，假设 $mE_1=\delta>0$，则由 E_1 的定义易知，对任意自然数 n，恒有

$$\int_E f^+(x)dx\geqslant\int_E\{f^+(x)\}_n dx\geqslant\int_{E_1}\{f^+(x)\}_n dx\geqslant nmE_1$$

$$=n\delta>0$$

因对任意 n 上式恒成立，这说明 $f^+(x)$ 在 E 上的积分值非有限，这与 $f(x)$ 可积性矛盾。同法可证 $mE_2=0$。

引理 2 设 $f(x)$，$g(x)$ 皆是 E 上非负函数，则对任意自然数 n，皆有

$$\{f(x)+g(x)\}_n\leqslant\{f(x)\}_n+\{g(x)\}_n\leqslant\{f(x)+g(x)\}_{2n}$$

证明 1° 证右端不等式。因为

$$\{f(x)\}_n+\{g(x)\}_n\leqslant f(x)+g(x)$$

$$\{f(x)\}_n+\{g(x)\}_n\leqslant 2n$$

于是有

$$\{f(x)\}_n+\{g(x)\}_n\leqslant\min(f(x)+g(x),2n)=\{f(x)+$$
$$+g(x)\}_{2n}$$

2° 证左端不等式。

设 $x_0\in E$，则有下述三种情况，

(a) 若 $f(x_0)\leqslant n$， $g(x_0)\leqslant n$，显然有

$$\{f(x_0)+g(x_0)\}_n\leqslant f(x_0)+g(x_0)=\{f(x_0)\}_n+\{g(x_0)\}_n$$

(b) 若 $f(x_0)>n$ 或 $g(x_0)>n$，不妨设 $f(x_0)>n$， $g(x_0)\leqslant n$，则有

$$\{f(x_0)+g(x_0)\}_n=n\leqslant n+g(x_0)=\{f(x_0)\}_n+\{g(x_0)\}_n$$

(c) 若 $f(x_0)>n$，且 $g(x_0)>n$，则有

$$\{f(x_0)+g(x_0)\}_n=n<n+n=\{f(x_0)\}_n+\{g(x_0)\}_n$$

引理 2 证毕。

定理 7 设 $f(x)$，$g(x)$ 皆在 E 上可积，则 $f(x)+g(x)$ 也在 E 上可积，且

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx$$

证明 因 $f(x)$，$g(x)$ 皆在 E 上可积，故由定理 6 知

$$m\{x|f(x)=\pm\infty\}=m\{x|g(x)=\pm\infty\}=0$$

所以 $f(x)+g(x)$ 在 E 上几乎处处取有限值。

而由定理 5 知在零集上改变函数值不影响其可积性与积分值，因此我们不妨假定 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 E 上处处取有限值。

1° 先就 $f(x)\geqslant 0$，$g(x)\geqslant 0$ 情形证之。

由引理 2 知，对任意自然数 n，恒有

$$\{f(x)+g(x)\}_n\leqslant\{f(x)\}_n+\{g(x)\}_n\leqslant\{f(x)+g(x)\}_{2n}$$

于是由§3定理 3 及定理 5 知有

$$\int_E\{f(x)+g(x)\}_n dx\leqslant\int_E\{f(x)\}_n dx+\int_E\{g(x)\}_n dx$$

$$\leqslant \int_E \{f(x)+g(x)\}_{2n} dx$$

从而

$$\int_E \{f(x)+g(x)\}dx \leqslant \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$$

$$\leqslant \int_E \{f(x)+g(x)\}dx$$

即定理成立。

2° 设 $f(x)$，$g(x)$ 皆是一般的可积函数，令

$E_1=\{x|f(x)\geqslant 0,\ g(x)\geqslant 0\}$，$E_2=\{x|f(x)<0, g(x)<0\}$

$E_3=\{x|f(x)\geqslant 0,\ g(x)<0,\ f(x)+g(x)\geqslant 0\}$，

$E_4=\{x|f(x)\geqslant 0,\ g(x)<0,\ f(x)+g(x)<0\}$

$E_5=\{x|f(x)<0,\ g(x)\geqslant 0,\ f(x)+g(x)\geqslant 0\}$，

$E_6=\{x|f(x)<0,\ g(x)\geqslant 0,\ f(x)+g(x)<0\}$

显然 E_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$) 为互不相交的可测集，且

$E=\bigcup\limits_{i=1}^{6} E_i$。

于是由1°的证明及定理 4 有

$$\int_{E_1} [f(x)+g(x)]dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_1} g(x)dx \tag{1}$$

$$\int_{E_2} [f(x)+g(x)]dx = \int_{E_2} f(x)dx + \int_{E_2} g(x)dx \tag{2}$$

依定理 4 知，右端的积分都有限， 所以这还说明 $f(x)+g(x)$ 在E_1和 E_2上可积。

因在 E_3上，$f(x)$，$f(x)+g(x)$，$-g(x)$都非负，且$f(x)=[f(x)+g(x)]+[-g(x)]$，故有

$$\int_{E_3} f(x)dx=\int_{E_3}[f(x)+g(x)]dx+\int_{E_3}[-g(x)]dx$$

$$=\int_{E_3}[f(x)+g(x)]dx-\int_{E_3}g(x)dx$$

即

$$\int_{E_3}[f(x)+g(x)]dx=\int_{E_3}f(x)dx+\int_{E_3}g(x)dx$$

同理有

$$\int_{E_4}[-g(x)]dx=\int_{E_4}-[f(x)+g(x)]dx+\int_{E_4}f(x)dx$$

即

$$\int_{E_4}[f(x)+g(x)]dx=\int_{E_4}f(x)dx+\int_{E_4}g(x)dx$$

同法可证 $f(x)+g(x)$分别在 E_5、E_6上可积且等式成立。于是由定理3知，$f(x)+g(x)$在$E=\bigcup_{i=1}^{6}E_i$上可积，且有

$$\int_E[f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx$$

定理 8 设$f(x)$在E上可积，c为任一实数，则 $cf(x)$ 在E上也可积，且有

$$\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx \tag{1}$$

证明 容易理解，这只就$f(x)$在E上非负可积且$c>0$情形证之即可。此时显然$cf(x)$必在E上也可积，故只须证明等式（1）成立。

1° 若c为任一自然数时，由定理7知式（1）成立。

若 $c=\frac{1}{m}$（m为任意自然数）时，则 $f(x)=m\cdot\frac{1}{m}f(x)$，于是由定理7，有

$$\int_E f(x)dx=\int_E m\cdot\frac{1}{m}f(x)dx=m\int_E\frac{1}{m}f(x)dx$$

即

$$\frac{1}{m}\int_E f(x)dx=\int_E\frac{1}{m}f(x)dx$$

于是若 $c=\frac{n}{m}$（n，m 为自然数）时，则有

$$\int_E\frac{n}{m}f(x)dx=n\int_E\frac{1}{m}f(x)dx=\frac{n}{m}\int_E f(x)dx$$

即当c为正有理数时式（1）成立。

2° 若$c>0$为无理数时，则由有理数的稠密性可取到正有理数 r和 r'，使$r<c<r'$。于是由推论 1，有

$$r\int_E f(x)dx=\int_E rf(x)dx\leqslant\int_E cf(x)dx\leqslant\int_E r'f(x)dx$$
$$=r'\int_E f(x)dx$$

令r，$r'\longrightarrow c$，则得

$$\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx$$

综上定理证毕。

定理 9 设 $f(x)$在E上可测，则 $f(x)$可积的充要条件是$|f(x)|$可积。

证明 **必要性** 因 $f(x)$可积，故 $f^+(x)$，$f^-(x)$都可积，而$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$，故由定理 7 知$|f(x)|$可积，且有

$$\int_E|f(x)|dx=\int_E f^+(x)dx+\int_E f^-(x)dx<+\infty$$

充分性 因 $f(x)$可测（注意这是题设条件，由 $|f(x)|$可积未必有此结果），所以

$$\int_E f^+(x)dx, \int_E f^-(x)dx$$ 皆有意义．又因

$$f^+(x)\leqslant |f(x)|, \quad f^-(x)\leqslant |f(x)|$$

且 $|f(x)|$ 可积，所以有

$$\int_E f^+(x)dx\leqslant\int_E |f(x)|\,dx< +\infty, \int_E f^-(x)dx$$

$$\leqslant\int_E |f(x)|\,dx<+\infty$$

故 $f(x)$ 可积。

这个定理告诉我们勒贝格积分是一种绝对收敛积分，这有别于黎曼积分理论中的一重广义积分理论。

定理10． 若 $f(x)$ 在 E 上可积，则

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E |f(x)|\,dx$$

证明 因为

$$\left|\int_E f(x)\ dx\right|=\left|\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx\right|$$

$$\leqslant\int_E f^+(x)dx+\int_E f^-(x)dx=\int_E |f(x)|\,dx$$

定理11 若

(i) $f(x)$ 在 E 上可测；

(ii) $g(x)\geqslant 0$，且在 E 上可积；

(iii) $|f(x)|\leqslant g(x)\quad (x\in E)$。

则 $f(x)$ 也在 E 上可积。

证明 只须证明 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 皆有有限的积分值。

事实上，已知 $f(x)$ 在 E 上可测，从而 $f^+(x)$，$f^-(x)$ 皆在 E 上非负可测，所以 $\int_E f^+(x)dx, \int_E f^-(x)dx$ 皆有意义。

又知 $f^+(x)+f^-(x)=|f(x)|\leqslant g(x)$，从而 $f^+(x)\leqslant g(x)$，$f^-(x)\leqslant g(x)$，且 $g(x)$ 在 E 上可积，于是有

$$\int_E f^+(x)dx \leqslant \int_E g(x)dx < +\infty, \int_E f^-(x)dx$$

$$\leqslant \int_E g(x)dx < +\infty$$

从而 $f(x)$在E上可积。

定理12 若 $f(x)$在E上可积，则对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$A\subseteq E$，且$mA<\delta$时，有

$$\left|\int_A f(x)dx\right|<\varepsilon$$

证明 令 $g(x)=|f(x)|$，于是由定理 9 知 $g(x)$在E上是非负可积的，故由定义 1 知，对任一 $\varepsilon>0$，存在自然数 $n_{\varepsilon 0}$ 使

$$\int_E g(x)dx-\int_E\{g(x)\}_{n_\varepsilon}dx=\int_E[g(x)-\{g(x)\}_{n_\varepsilon}]dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}$$

令 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}>0$，则当$A\subseteq E$，且$mA<\delta$时，由定理10 显然有

$$\left|\int_A f(x)dx\right|\leqslant\int_A g(x)dx=\int_A[g(x)-\{g(x)\}_{n_\varepsilon}]dx$$

$$+\int_A\{g(x)\}_{n_\varepsilon}dx<\frac{\varepsilon}{2}+\int_A n_\varepsilon dx=\frac{\varepsilon}{2}+n_\varepsilon\cdot mA<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

定理证毕。

这个定理所刻划的性质称作"积分的绝对连续性"，它是一个很重要的性质。另外，由定理的证明可看出，这个定理的结果可改为

$$\int_A|f(x)|dx<\varepsilon$$

定理13 若 $f(x)$是 $[a,b]$上的可积函数，则对任意$\varepsilon>0$，必存在 $[a,b]$上连续函数 $\varphi(x)$，使得

$$\int_{[a,b]}\left|f(x)-\varphi(x)\right|dx<\varepsilon$$

证明 令 $\{f(x)\}_n=\{f^+(x)\}_n-\{f^-(x)\}_n$， 于是对任意$\varepsilon>0$，存在 n，使得

$$\int_{[a,b]}\left|f(x)-\{f(x)\}_n\right|dx=\int_{[a,b]}\left|[f^+(x)-f^-(x)]-\right.$$

$$\left.[\{f^+(x)\}_n-\{f^-(x)\}_n]\right|dx\leqslant\int_{[a,b]}[f^+(x)-\{f^+(x)\}_n]dx$$

$$+\int_{[a,b]}[f^-(x)-\{f^-(x)\}_n]dx<\frac{\varepsilon}{3}$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3n}>0$，对函数 $\{f(x)\}_n$ 应用第四章 §5定理 2，应有闭集$F\subseteq[a,b]$及 $[a,b]$上连续函数 $\varphi(x)$，使得

（1） $m([a,b]-F)<\delta$;

（2） 当$x\in F$时， 有 $\{f(x)\}_n=\varphi(x)$；

（3） $|\varphi(x)|\leqslant n$。

从而

$$\int_{[a,b]}|\{f(x)\}_n-\varphi(x)|dx=\int_{[a,b]-F}|\{f(x)\}_n-\varphi(x)|dx$$

于是有

$$\int_{[a,b]}|f(x)-\varphi(x)|dx\leqslant\int_{[a,b]}\left|f(x)-\{f(x)\}_n\right|dx$$

$$+\int_{[a,b]}\left|\{f(x)\}_n-\varphi(x)\right|dx<\frac{\varepsilon}{3}+\int_{[a,b]-F}\left[\left|\{f(x)\}_n\right|\right.$$

$$\left.+\left|\varphi(x)\right|\right]dx\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+2n\cdot m([a,b]-F)<\varepsilon$$

定理得证。

习　　题

1　若

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}} & x\text{为}[0,1]\text{上的无理数}\\ x^2 & x\text{为}[0,1]\text{上的有理数}\end{cases}$$

试计算　$(L)\int_0^1 f(x)dx$。

2　若

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in F\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & x\overline{\in}F\end{cases}$$

其中F是康托完备集，试计算（L）　$\int_0^1 f(x)dx$。

又若

$$f_1(x)=\begin{cases}100 & x\in F\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & x\overline{\in}F\end{cases}$$

问$(L)\int_0^1 f(x)dx$与$(L)\int_0^1 f_1(x)$　有何关系？

3　设$mE<+\infty$，$f(x)$ 是E上的非负可测函数，令

$E_n=\{x|n-1\leqslant f(x)<n\}$　$(n=1,\ 2,\cdots)$

证明$f(x)$在E上非负可积的充要条件是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot mE_n$收敛。

4　设 $mE<+\infty$，$f(x)$在E上可积，令

$e_n=\{x||f(x)|\geqslant n\}$

证明　$\lim\limits_{n\to\infty} n(me_n)=0$。

§5　积分极限定理

在这一节里，我们主要是研究逐项积分问题，也就是积分

手续与极限过程交换顺序的问题。我们将会发现在极限换序问题上，勒贝格积分要比黎曼积分所要求的条件少得多，因而在极限换序问题上前者要比后者灵便得多。本节中的勒维(Levi)定理、法都（Fatou）引理和勒贝格控制收敛定理通常称之为勒贝格积分中的三大定理，它们在分析数学中有着广泛的应用。

在本节所讨论的各定理中，我们仍然假定 $mE<+\infty$。

定理 1（勒贝格有界收敛定理）设

(i) $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$，…是 E 上一列可测函数；

(ii) $\{f_n(x)\}$ 一致有界，即有实数 $M>0$，使

$$|f_n(x)|\leqslant M\quad(n=1,\ 2,\ \cdots;\ x\in E)$$

(iii) $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$。

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx \tag{1}$$

证明 1° $f_n(x)$和 $f(x)$都是E 上可积函数。

事实上，若 $mE=0$显然定理成立。今设$mE>0$。因$f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，故由第四章§6定理 2（黎斯定理）知有子列$\{f_{n_i}(x)\}$在$E$上几乎处处收敛于 $f(x)$，从而可测，且由(ii)知在E上几乎处处有 $|f(x)|\leqslant M$，所以 $f_n(x)$和 $f(x)$ 皆是E 上几乎处处有界可测函数，故都是E上可积函数。并且由§4定理 5 可假定$|f(x)|\leqslant M$在E上处处成立。

2° 往证等式（1）成立。为此只须证明对于任意 $\varepsilon>0$。有 N，使当 $n\geqslant N$时，有

$$\left|\int_E f_n(x)dx-\int_E f(x)dx\right|<\varepsilon$$

事实上，对任意 $\varepsilon>0$，由依测度收敛定义知应有 N，使

$n \geqslant N$时，有

$$mE_n = m\left\{x \,\middle|\, |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2mE}\right\} < \frac{\varepsilon}{4M}$$

于是当 $n \geqslant N$时，有

$$\left|\int_E f_n dx - \int_E f dx\right| \leqslant \int_E |f_n - f| dx = \int_{E-E_n} |f_n - f| dx$$

$$+ \int_{E_n} |f_n - f| dx < \frac{\varepsilon}{2mE} \cdot m(E - E_n) + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2mE} mE + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

推论 1 若 $\{f_n(x)\}$ 是E 上一致有界的可测函数列，且在E上 $\{f_n(x)\}$几乎处处收敛于 $f(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

证明 因为$\{f_n(x)\}$几乎处处收敛于 $f(x)$，则有$f_n(x) \Longrightarrow f(x)$，从而由定理 1 得证。

引理 1 设$\{f_n(x)\}$，$f(x)$分别是E上非负单调不减函数列和函数，若对 $x_0 \in E$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$，则对每个自然数$k$，恒有

$$\lim_{n\to\infty} \{f_n(x_0)\}_k = \{f(x_0)\}_k \qquad (*)$$

证明 1° 若 $f(x_0) > k$，因 $f_n(x_0) \longrightarrow f(x_0)$，故有$n_k$使当$n \geqslant n_k$ 时，皆有 $f_n(x_0) > k$，从而由截断函数定义知，当 $n \geqslant n_k$时，恒有

$$\{f_n(x_0)\}_k = k = \{f(x_0)\}_k$$

故式$(*)$成立。

2° 若$f(x_0) \leqslant k$，则由条件知，对任意n，恒有 $f_n(x_0) \leqslant k$，故有

$$f_n(x_0)=\{f_n(x_0)\}_k,\ f(x_0)=\{f(x_0)\}_k$$

但 $f_n(x_0)\longrightarrow f(x_0)$，故有$\{f_n(x_0)\}_k\longrightarrow\{f(x_0)\}_k$。

引理证毕。

定理 2 （勒贝格逐项积分定理）若

(i) $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_n(x)$，$\cdots$ 是E 上一列非负可测函数；

(ii) $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x).$$

则

$$\int_E f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx \qquad (*)$$

证明 1° $f(x)$在E上非负可测，故$f(x)$有积分值。

事实上，令 $S_m(x)=\sum_{n=1}^{m}f_n(x)$ $(m=1,\ 2\cdots)$，则每个$S_m(x)$皆是E上非负可测函数，且有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}f_n(x)=\lim_{m\to\infty}S_m(x) \qquad (1)$$

从而$f(x)$是E上非负可测函数，故有积分值。

2° 往证等式($*$)成立。

左$\geqslant$右 显然对任意自然数 m，皆有

$$\int_E f(x)dx\geqslant\int_E\left(\sum_{n=1}^{m}f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{m}\int_E f_n(x)dx$$

所以

$$\int_E f(x)dx\geqslant\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\int_E f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx \qquad (2)$$

左⩽右　由式（2）可知，若 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx=+\infty$，则式(*)自然成立，故设

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx<+\infty$$

仍令 $S_m(x)=\sum_{n=1}^{m}f_n(x)$，于是结合1°中式（1）则由引理1知，对任意自然数 k，恒有

$$\lim_{m\to\infty}\{S_m(x)\}_k=\{f(x)\}_k \qquad (x\in E)$$

从而由推论1知，有

$$\lim_{m\to\infty}\int_E\{S_m(x)\}_k dx=\int_E\{f(x)\}_k dx \tag{3}$$

因对每个m，皆有

$$\int_E\left\{S_m(x)\right\}_k dx\leqslant\int_E S_m(x)\,dx \tag{4}$$

从而结合（3）及（4）式，便得

$$\int_E\{f(x)\}_k dx\leqslant\lim_{m\to\infty}\int_E S_m(x)dx=\lim_{m\to\infty}\int_E\sum_{n=1}^{m}f_n(x)dx$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\int_E f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx \tag{5}$$

因对每个k式（5）皆成立，故当$k\longrightarrow+\infty$时，便得

$$\int_E f(x)dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx \tag{6}$$

结合式（2）及（6）得证式(*)成立。定理证毕。

定理2告诉我们，在勒贝格积分理论中，对于非负函数项级数，几乎可以无条件地逐项积分，这比黎曼积分灵便得多

了。

定理 3 （勒维渐升函数列积分定理）若

(i) $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, ……是E上一列非负可测函数；

(ii) $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots\cdots$；

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$。

则

$$\int_E f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx \qquad (1)$$

证明 显然 $f(x)$ 非负可测，故必有积分值，从而只须证等式（1）成立。为此，注意到本定理与定理 2 条件间的关系，容易看出只须用已给的函数列 $\{f_n(x)\}$ 构成新的函数列 $\{g_n(x)\}$，使其满足定理 2 的条件即可。

1° 因为 $f_n(x)\leqslant f(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$，所以若有n_0使 $\int_E f_{n_0}(x)\,dx=+\infty$，则$\int_E f(x)\,dx=+\infty$显然定理成立。

以下设所有的 $f_n(x)$ 都是可积的。令

$g_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$

则每个 $g_n(x)$ 也都是E上非负可测函数。

事实上，因为每个 $f_n(x)$ 皆可积，故由§4定理 6 知它们在E上皆几乎处处有限，从而每个 $g_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$ 在E上皆几乎处处有意义，因之由可测函数性质知 $g_n(x)$在E上皆可测，$g_n(x)$的非负性是显然的。

2° 对1°中的E上非负可测函数列 $\{g_n(x)\}$，显然对任意m，恒有

$$f_m(x)=f_1(x)+\sum_{n=1}^{m-1} g_n(x)$$

从而有

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x)=f_1(x)+\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m-1} g_n(x)$$

$$=f_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

故由定理 2 便得

$$\int_E f(x)dx=\int_E f_1(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_E g_n(x)dx$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left[\int_E f_1(x)dx+\sum_{n=1}^{m-1}\int_E g_n(x)\,dx\right]$$

$$=\lim_{m\to\infty}\int_E\left[f_1(x)+\sum_{n=1}^{m-1} g_n(x)\right]dx$$

$$=\lim_{m\to\infty}\int_E f_m(x)dx$$

定理证毕。

定理 4 （法都引理）设 $f_1(x)$， $f_2(x)$， …， $f_n(x)$， … 是 E 上一列非负可测函数，则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$$

证明 只须用已给的函数列 $\{f_n(x)\}$， 构造新函数列 $\{g_n(x)\}$，使 $\{g_n(x)\}$ 既合于定理3条件，又具有性质 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，从而由定理 3 即可证得本定理。

事实上，由第四章§1定义 8 知有

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\inf_k\{f_{n+k}(x)\}$$

故令

$$g_n(x)=\inf_k\{f_{n+k}(x)\}\quad(n=1,\ 2,\cdots)$$

则$\{g_n(x)\}$是E上非负可测函数列．非负性是显然的；另外因对任意实数 a，恒有

$$\{x\,|g_n(x)\geqslant a\}=\{x\,|\inf_k\{f_{n+k}(x)\}\geqslant a\}$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x|f_{n+k}(x)\geqslant a\}$$

因每个 $f_n(x)$ 皆可测，故上式右端是可测集，从而左端是可测集，故每个$g_n(x)$是可测函数．另外显然有

$$g_1(x)\leqslant g_2(x)\leqslant\cdots\leqslant g_{n-1}(x)\leqslant g_n(x)\leqslant\cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\varliminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

于是由定理 3 及$g_n(x)$的定义得

$$\int_E\varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int_E\lim_{n\to\infty} g_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx$$

$$=\varliminf_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$$

本定理结论中带有不等号可能会使我们感到遗憾，然而它却是不可能去掉的，因为有时不等号确实能够成立。

例 1　在$(0,1)$上定义函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}n & x\in\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\\ 0 & x\in\left[\dfrac{1}{n},\ 1\right)\end{cases}\qquad n=2,\ 3,\cdots$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\equiv0$，$\int_{(0,1)}f_n(x)dx\equiv1\quad(n=2,3\cdots)$

从而有

$$\int_{(0,1)}\varliminf_{n\to\infty}f_n(x)dx=0<1=\varliminf_{n\to\infty}\int_{(0,1)}f_n(x)dx$$

定理 5 （维他利*定理）设

(i) $mE<+\infty$；

(ii) $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$，…是E 上一列可积函数；

(iii) $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$；

(iv) $f_n(x)$之积分具有等度绝对连续性，即对任意 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，使对任意 $A\subseteq E$，当 $mA<\delta$时，恒有

$$\left|\int_A f_n(x)\,dx\right|<\varepsilon\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad (1)$$

则 $f(x)$是可积函数，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx \qquad (*)$$

这一定理的证明过程比较复杂，大体思路是首先证明$f(x)$可积．为此，在已给条件下特别是应用条件 (iii)及 (iv)构造一个E上非负可积函数 $F(x)$，使$|f(x)|\leqslant F(x)$ P. P. 于 E，从而由§4定理 5 及定理11证得 $f(x)$ 可积；次证式(*)成立．为此只须证对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数N，使当$n\geqslant N$时，恒有

$$\left|\int_E f(x)\,dx-\int_E f_n(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

证明 第一步往证 $f(x)$可积．

1° 由(iv)知，任意 $\varepsilon>0$，有相应的 $\delta>0$，使式 (1)成立．对此 $\varepsilon>0$和 $\delta>0$由 (iii)知，应有 N，使当 $n\geqslant N$ 时，恒有

$$mE_n=m\{x\,|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}<\frac{\delta}{2} \qquad (2)$$

于是当 k，$n\geqslant N$时，对

---

* vitali

$$E_k=\{x\,|\,|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}$$

$$E_n=\{x\,|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\} \tag{3}$$

因为

$$|f_k(x)-f_n(x)|\leqslant|f_k(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|$$

从而结合式（3）有

$$E_{kn}=\{x\,|\,|f_k(x)-f_n(x)|\geqslant 2\varepsilon\}\subseteq E_k\cup E_n \tag{4}$$

于是由式（2）可知

$$mE_{kn}\leqslant mE_k+mE_n<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta \tag{5}$$

所以当 k，$n\geqslant N$时，因对上述 $\varepsilon>0$，$\delta>0$有式（1）成立，再注意到式（4），（5）便有

$$\left|\int_E f_k(x)\,dx-\int_E f_n(x)\,dx\right|\leqslant\int_E |f_k(x)-f_n(x)|\,dx$$

$$=\int_{E-E_{kn}}|f_k(x)-f_n(x)|\,dx+\int_{E_{kn}}|f_k(x)-f_n(x)|\,dx$$

$$\leqslant 2\varepsilon\cdot m(E-E_{kn})+\int_{E_{kn}}|f_k(x)|\,dx+\int_{E_{kn}}|f_n(x)|\,dx$$

$$<2\varepsilon\cdot mE+2\varepsilon+2\varepsilon=2\varepsilon(mE+2)^{*}$$

可见

$$\lim_{k,n\to\infty}\int_E |f_k(x)-f_n(x)|\,dx=0 \tag{6}$$

2° 任取一正项收敛级数$\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i$，由式（6）知可取一子列$\{f_{n_i}(x)\}$，使

$$\int_E |f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|\,dx<\eta_i \tag{7}$$

因为 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，当然有$f_{n_i}(x)\Longrightarrow f(x)$，从而由第四章§6

* 注意$f_n(x)$之积分具有等度绝对连续性，则$|f_n(x)|$之积也具有等度绝对连续性。

黎斯定理知，$\{f_{n_i}(x)\}$必有子列几乎处处收敛于 $f(x)$， 因此不妨即设 $\{f_{n_i}(x)\}$ 合于此条件．于是

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x))+f_{n_1}(x)$$

令

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|+|f_{n_1}(x)|$$

于是由勒贝格逐项积分定理知

$$\int_E F(x)dx=\sum_{i=1}^{\infty}\int_E|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|dx+\int_E|f_{n_1}(x)|dx$$

$$<\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i+\int_E|f_{n_1}(x)|dx<+\infty$$

即 $F(x)$ 可积，又因$|f(x)|\leqslant F(x)$ $P.P.$于E，故由§4定理5及11知 $f(x)$可积。

第二步往证式（＊）成立。

对任意$\varepsilon>0$，基于第一步的证明可知， 存在N，当$n\geqslant N$时，恒有

$$\left|\int_E f(x)dx-\int_E f_n(x)dx\right|\leqslant\int_E|f(x)-f_n(x)|dx$$

$$=\int_{E_n}|f(x)-f_n(x)|dx+\int_{E-E_n}|f(x)-f_n(x)|dx$$

$$<\int_{E_n}|f(x)|dx+\int_{E_n}|f_n(x)|dx+\varepsilon mE$$

$$<\int_{E_n}|f(x)|dx+\varepsilon+\varepsilon mE$$

由 $f(x)$ 可积性知$|f(x)|$可积，从而由§4积分绝对连续性定理12知，可要求 $|f(x)|$在E_n上的积分也小于 ε。从而由 $\varepsilon>0$的任意性知式（＊）成立。

定理 6 （勒贝格控制收敛定理）设

(i) $F(x)$是E上可积函数；

(ii) $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$是$E$上一列可测函数；

(iii) $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ $(n=1, 2, \cdots; x \in E)$；

(iv) $f_n(x) \Longrightarrow f(x)$。

则

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

证明 将此定理条件与定理5条件相比较，由§4 定理11知，$f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 皆可积，从而只须证得 $f_n(x)$ 之积分具有等度之绝对连续性，则本定理条件即合于定理5条件，于是得证本定理。

事实上，对任意 $\varepsilon>0$，因 $F(x)$ 的积分是绝对连续的，从而存在$\delta>0$，使当$A\subseteq E$且 $mA<\delta$时，结合 iii)，则有

$$\left|\int_A f_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_A |f_n(x)|\,dx \leqslant \int_A F(x)\,dx < \varepsilon \quad (n=1, 2, \cdots)$$

所以 $f_n(x)$的积分具有等度之绝对连续性。

推论 2 设 $f_n(x)$是E上一列可测函数，且几乎处处收敛于 $f(x)$，又存在E上可积函数 $F(x)$，使$|f_n(x)| \leqslant F(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

证明 由§4定理11知，$f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$皆可积，故由§4定理6知，$|f_n(x)| < +\infty$ P.P.于E。又因 $f_n(x)$几乎处处收敛于 $f(x)$，于是由第四章 §6 定理1知 $f_n(x) \Longrightarrow f(x)$。

综上可见此推论的条件合于定理6条件，故由该定理得证本推论成立。

定理7 （积分完全可加性）设

(i) $f(x)$ 在E上有积分值；

(ii) $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，且$E_1$，$E_2$，…，$E_n$，…是一列互不相交的可测集．则

$$\int_E f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\,dx$$

证明 因为 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，且 $f(x)$ 有积分值从而 $f^+(x)$，$f^-(x)$的积分值不能同时是无限的，因此我们不妨仅就 $f(x)\geqslant 0$ 的情形证之．

令

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x) & \text{当 } x\in E_n \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x\in E-E_n \text{ 时}\end{cases}$$

则 $f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$皆是 E上非负可测函数，且 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$．于是由定理2有

$$\int_E f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{E-E_n} f_n(x)\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_{E_n} f_n(x)\,dx\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\,dx$$

习　　题

1．证明

$$(L)\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\quad (L)\int_0^1 x^{n-1}dx$$

2. 求

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\sin nx\,dx$$

3. 证明

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}dx=0$$

4. 试用勒贝格有界收敛定理证明：若 $f_n(x)\Rightarrow 0$（当$n\longrightarrow\infty$时）且$mE<+\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx=0$$

5. 试从$\frac{1}{1+x}=(1-x)+(x^2-x^3)+\cdots$ （$0<x<1$）推证

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

6. 设 $mE<+\infty$，$\{f_n(x)\}$ 是E上的一列非负可测函数，且

$f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant f_3(x)\geqslant\cdots$

$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ $P.P.$于E，则当 $\{f_n(x)\}$中至少已知一个为可积时，有

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$$

7. 若 $f(x)$ $(a-\delta,b+\delta)$在上可积，试证：

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0$$

§6 一般可测集合上的积分

在前面讨论的E上函数的积分问题中，总是假定了 $mE<+\infty$，现在我们把这一限制去掉，而对定义在更为一般的可测集上的函数来讨论它们的勒贝格积分问题。

设E是 R^n中一个可测集，$f(x)$ 是E上一个函数，令

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{当 } x\in E \text{时} \\ 0 & \text{当 } x\notin E \text{时} \end{cases}$$

则 $F(x)$就成为整个空间 R^n 上的函数，因此以下我们只考虑整个空间R^n上函数的积分，显然这将无妨于它的一般性。

我们仍分两步来进行。先讨论R^n上非负函数，然后再在此基础R^n上讨论上一般函数问题。

一、 $f(x)$是R^n 上非负函数

对每一自然数 $i\leqslant n$，$\{a_k^{(i)}\}$和 $\{b_k^{(i)}\}$ 是二实数列， 且

$$0\geqslant a_1^{(i)}\geqslant a_2^{(i)}\geqslant a_3^{(i)}\geqslant\cdots\geqslant a_k^{(i)}\geqslant\cdots$$

$$0\leqslant b_1^{(i)}\leqslant b_2^{(i)}\leqslant b_3^{(i)}\leqslant\cdots\leqslant b_k^{(i)}\leqslant\cdots$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k^{(i)}=-\infty,\quad \lim_{k\to\infty} b_k^{(i)}=+\infty\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

令闭长方体

$$I_k=\{x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mid a_k^{(i)}\leqslant x_i\leqslant b_k^{(i)},\ i=1,2,\cdots\ n\}$$

则有

$$I_1\subseteq I_2\subseteq I_3\subseteq\cdots\subseteq I_k\subseteq\cdots\cdots$$

如果对于每一闭长方体 I_k $(k=1,\ 2,\ \cdots)$，$f(x)$ 在 I_k 上都有积分值，则显然有

$$\int_{I_k} f(x)\,dx\leqslant\int_{I_{k+1}} f(x)\,dx$$

因此我们可以定义

$$\int_{R_n} f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\int_{I_k} f(x)\,dx$$

为 $f(x)$ 在 R^n 上的积分值，并且当这个积分值为有限时，称 $f(x)$为 R^n上的可积函数。

要使上述定义具有实际意义，还必须证明上述积分值不因闭长方体I_k的选取不同而改变。即如果任意另取一列闭长方体

$$I_k^* = \{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid c_k^{(i)} \leqslant x_i \leqslant d_k^{(i)}, \ i=1, 2, \cdots, n\}$$

其中

$$0 \geqslant c_1^{(i)} \geqslant c_2^{(i)} \geqslant c_3^{(i)} \geqslant \cdots \geqslant c_k^{(i)} \geqslant \cdots$$

$$0 \leqslant d_1^{(i)} \leqslant d_2^{(i)} \leqslant d_3^{(i)} \leqslant \cdots \leqslant d_k^{(i)} \leqslant \cdots$$

$$\lim_{k\to\infty} c_k^{(i)} = -\infty, \ \lim_{k\to\infty} d_k^{(i)} = +\infty \quad (i=1,2, \cdots, n)$$

则 $f(x)$ 也应在每一I_k^*上有积分值，且有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{I_k^*} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{I_k} f(x)\,dx = \int_{R^n} f(x)\,dx \qquad (※)$$

事实上，注意到 $f(x)$ 在每一 I_k上都有积分值，从而由§4定理1知，$f(x)$ 在每一I_k上都是非负可测函数，而且

$$\int_{I_k} f(x)\,dx = mG(I_k; f)$$

于是 $f(x)$ 就是R^n上的非负可测函数，并且

$$\int_{R^n} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{I_k} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} mG(I_k; f) = mG(R^n; f)$$

这是因为

$$G(I_1; f) \subseteq G(I_2; f) \subseteq \cdots \subseteq G(I_k; f) \subseteq \cdots$$

且有

$$G(R^n; f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} G(I_k; f)$$

既然 $f(x)$ 是 R^n上的非负可测函数，显然在每一闭长方体 I_k^*（可测集）上是非负可测函数，故必也有积分值，且

$$\int_{I_k^*} f(x)\,dx = mG(I_k^*; f)$$

特别地也应有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{I_k^*} f(x)\,dx = mG(R^n; f)$$

所以自然有式(＊)成立。

综上我们证明了上述定义的合理性，且有

定理1 R^n上非负函数$f(x)$有积分值的充要条件是$f(x)$在R^n上非负可测，并且

$$\int_{R^n} f(x)\,dx = mG(R^n; f)$$

而$f(x)$在R^n上可积则相当于$f(x)$非负可测，且其下方图形的测度是有限的。

二、$f(x)$是R^n上一般函数

象在§4中所作的那样，我们仍分别考虑非负函数$f^+(x)$和$f^-(x)$的积分，如果

$$\int_{R^n} f^+(x)\,dx, \qquad \int_{R^n} f^-(x)\,dx$$

都有意义，且不同时为无限，我们就定义$f(x)$的积分值为

$$\int_{R^n} f(x)\,dx = \int_{R^n} f^+(x)\,dx - \int_{R^n} f^-(x)\,dx$$

当上述$f^+(x)$和$f^-(x)$的积分值都有限时，则称$f(x)$在R^n上可积。

由上述定义可知，如果$f(x)$有积分值，则非负函数$f^+(x)$和$f^-(x)$必皆有积分值，从而由定理1知，$f^+(x)$和$f^-(x)$都是R^n上可测函数，于是$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$是R^n上可测函数，且有

$$\int_{R^n} f(x)\,dx = \int_{R^n} f^+(x)\,dx - \int_{R^n} f^-(x)\,dx$$
$$= mG(R^n; f^+) - mG(R^n; f^-)$$

在上述积分的定义下，前面推得的许多积分性质仍都成立（但§5的定理1不再成立），例如：

定理 2 可测函数 $f(x)$ 在 R^n 上可积的充要条件是 $|f(x)|$ 可积。

证明 §4定理 9 的证明过程并未涉及到 $f(x)$ 的定义域点集 E 的测度问题，所以可以完全应用§4定理 9 的证明方法与过程来证明此定理。

定理 3 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$，… 是R^n上一列非负可测函数，且

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

则

$$\int_{R^n}f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R^n}f_n(x)\,dx$$

证明 显然对任意自然数N，恒有

$$\int_{R^n}f(x)\,dx\geqslant\int_{R^n}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{N}\int_{R^n}f_n(x)\,dx$$

所以有

$$\int_{R^n}f(x)\,dx\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R^n}f_n(x)\,dx$$

另一方面，对任意闭长方体 I_k，依§5勒贝格逐项积分定理，则恒有

$$\int_{I_k}f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{I_k}f_n(x)\,dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R^n}f_n(x)\,dx$$

令 $k\longrightarrow\infty$，即得

$$\int_{R^n}f(x)\,dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R^n}f_n(x)\,dx$$

综上即得

$$\int_{R^n} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{R^n} f_n(x)\,dx$$

习　　题

1. 证明勒贝格控制收敛定理可以推广到$mE=+\infty$时的情形。

2. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}=1$$

3. 证明勒维定理可以推广到 $mE=+\infty$的情形.

4. 设 $mE=+\infty$，而$f(x)$是E上非负可测函数，令

$$\{f(x)\}_n=\begin{cases} f(x) & \text{当 } f(x)\leqslant n \text{ 时} \\ n & \text{当 } f(x)>n \text{ 时}\end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E\{f(x)\}_n dx=\int_E f(x)\,dx$

5. 证明 $[a,b]$上广义黎曼可积函数 $f(x)$ 为勒贝格可积的充要条件是 $|f(x)|$ 为广义黎曼可积．而且，当条件满足时，$f(x)$ 的勒贝格积分值与 $f(x)$ 的黎曼积分值相等．

6. 勒贝格有界收敛定理当$mE=+\infty$时不再成立。

§7　富比尼(Fubini)定理

在黎曼积分理论中，曾讨论过重积分与累次积分的关系，如果二元函数 $f(x,y)$在平面中矩形

$$I=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$$

上连续，则有

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

我们在这一节中将要讨论的中心问题，就是对勒贝格积分建立相应的定理，即富比尼定理．我们将会看到在交换积分次序这个问题上，勒贝格积分要求的条件也是比黎曼积分要求的条件少得多，这也是勒贝格积分理论较之黎曼积分理论又一优越之处．

为了建立富比尼定理，我们还得进一步讨论乘积空间的测度问题．为此，我们先扼要回顾一下第三章§5中已获得的有关主要结果：

〔1〕若A，B分别是R^p和R^q中的可测集，则$A\times B$必是R^{p+q}中的可测集，且

$$m(A\times B)=mA\times mB$$

〔2〕若E是R^{p+q}中的可测集，则几乎对所有的$x\in R^p$，截面$E_x=\{y\,|(x,y)\in E\}$都是R^q中的可测集．

现在我们要在上述基础上进一步证明下述定理：

定理1　设E是$R^p\times R^q=R^{p+q}$中的可测集，令

$$m(x)=mE_x\quad(x\in R^p)$$

则$m(x)$是R^p上几乎处处有定义的可测函数，且有

$$mE=\int_{R^p}m(x)\,dx \tag{1}$$

证明　因为由〔2〕知E_x几乎对所有的$x\in R^p$都可测，所以$m(x)$在R^p上几乎处处有定义．下面来证明$m(x)$是R^p上可测函数，且有式（1）成立．

我们先就E是有界集合情形证之，从而有开长方体$I=I_1\times I_2$使$E\subseteq I=I_1\times I_2$．我们也还是象在第三章§5中所作的那样，分以下几步来证明．

1°　若$E=I'=I_1'\times I_2'\subseteq I=I_1\times I_2$是长方体时，则

$$m(x)=\begin{cases} mI_2'=|I_2'| & \text{当 } x\in I_1' \text{时} \\ 0 & \text{当 } x\overline{\in} I_1' \text{时}\end{cases}$$

是R^p上简单函数，自然是可测的，且由〔1〕有

$$\int_{R^p} m(x)\,dx=\int_{R^p-I_1'} m(x)\,dx+\int_{I_1'} m(x)\,dx=\int_{I_1'} mI_2'\,dx$$

$$=mI_2'\int_{I_1'} 1\,dx=mI_2'\times mI_1'=m(I_2'\times I_1')=mE$$

2° 设 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n, I_i\cap I_j=\phi(i\neq j)$，每个 I_n皆是 R^{p+q} 中长方体，则对任意 x，显然有

$$m(x)=mE_x=\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)_x$$

由1°知每个 $m(I_n)_x$都是可测函数，所以 $m(x)$也是可测函数，且由§5定理 2 及1°知

$$\int_{R^p} m(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R^p} m(I_n)_x dx=\sum_{n=1}^{\infty} mI_n=mE$$

由此可见，当E是 R^{p+q}中任一开集时，定理亦成立。

3° 若E是G_δ 型集，即存在开集列使

$$I\supseteq G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\supseteq G_n\supseteq\cdots,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n=E$$

从而有.

$$E_x=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)_x=\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n)_x$$

又由第二章§4定理 7 知，开集G总可表成有限或可列多个互不相交的长方体的并，所以由2°知，每个 $m(G_n)_x$ 皆是x 的可测函数，从而由第三章§3定理11知有 $mE_x=\lim\limits_{n\to\infty} m(G_n)_x$， 所以

$m(x)=mE_x$ 是可测函数。

因为开集列$\{G_n\}$是单调减小的，从而有

$$m(G_1)_x-m(G_n)_x\leqslant m(G_1)_x-m(G_{n+1})_x$$

$(n=1, 2, \cdots)$，于是由§5定理 3（勒维渐升函数列积分定理）知

$$\int_{R^p} m(G_1)_x dx-\int_{R^p} m(x)\,dx=\int_{R^p}\lim_{n\to\infty}[m(G_1)_x-m(G_n)_x]dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{R^p}[m(G_1)_x-m(G_n)_x]dx=\lim_{n\to\infty}\left[\int_{R^p} m(G_1)_x\right.$$

$$\left.-\int_{R^p} m(G_n)_x dx\right]=\lim_{n\to\infty}(mG_1-mG_n)=mG_1-\lim_{n\to\infty} mG_n$$

$$=mG_1-mE$$

所以

$$mE=\int_{R^p} m(x)\,dx$$

4° 若$mE=0$，则由第三章§5定理 2 知，有$m(x)=mE_x=0$ P.P. 于 R^p，故$m(x)$是可测函数，且有

$$mE=0=\int_{R^p} m(x)\,dx$$

5° 最后设$E\subseteq I$ 是一个一般的可测集，则由第三章§4定理 5 知，有 G_δ型集 $G\supseteq E$使 $G\subseteq I$，$mG=mE$，于是有$m(G-E)=0$，而 $G=(G-E)\cup E$，所以有

$G_x=(G-E)_x\cup E_x$，$mE_x=mG_x-m(G-E)_x$因为G是G_δ型集，$m(G-E)=0$，故由 3°及 4°知，mG_x 和 $m(G-E)_x$ 都是R^p上几乎处处有定义的可测函数，所以 $mE_x=m(x)$ 也是几乎处处有定义的可测函数，且有

$$\int_{R^p} m(x)\,dx=\int_{R^p} mG_x dx-\int_{R^p} m(G-E)_x dx$$

$$=\int_{R^p} mG_x dx=mG=mE$$

于是当E是有界可测集时，定理成立。

设E是无界可测集

我们仍用§6中方法，作单调增大闭长方体列

$I_k=\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_{p+q})\mid a_k^{(i)}\leqslant x_i\leqslant b_k^{(i)}, i=1, 2, \cdots, p+q\}$ $(k=1, 2, \cdots)$

使 $\lim\limits_{k\to\infty} I_k=R^{p+q}$

令

$$E_k=E\cap(I_k-I_{k-1}) \quad (k=1, 2, \cdots; I_0=\phi)$$

于是每个E_k皆是有界可测集，且有

$$E_k\cap E_l=\phi \ (k\neq l), \quad E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

从而 $mE=\sum\limits_{k=1}^{\infty} mE_k$。又

$$E_x=\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)_x=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_k)_x$$

于是因每个$m(E_k)_x$皆是x的可测函数，故

$$m(x)=mE_x=\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)_x$$

是可测函数，且由前一部分证明知

$$mE_k=\int_{R^p} m(E_k)_x dx \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

于是由§6中定理3，有

$$\int_{R^p} m(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{R^p} m(E_k)_x dx=\sum_{k=1}^{\infty} mE_k=mE$$

定理全部证毕。

定理2 （富比尼定理）设$f(x,y)$是$R^{p+q}=R^p\times R^q$上的可积函数，则

(i) 几乎对所有的 $x\in R^p$, $f(x,y)$ 是R^q上关于 y 的可积函数;

(ii) 几乎处处有定义的函数

$$g(x)=\int_{R^q}f(x,y)\,dy$$

在R^p上可积;

(iii) 下述等式成立:

$$\int_{R^{q+p}}f(p)\,dp=\int_{R^p}dx\int_{R^q}f(x,y)\,dy$$

证明 我们仍分两步证之。

1° 设 $f(p)$是非负可测函数，则依§6 定理 1 知，$f(p)$ 的下方图形 $G=G(R^{p+q};\ f)$ 是可测集，且

$$mG=mG(R^{p+q};f)=\int_{R^{p+q}}f(p)\,dp \qquad (1)$$

因 $f(p)$ 可积，故有 $mG<+\infty$。又由定理 1 知，mG_x 是 R^p 上几乎处处有定义的可测函数，且有

$$\int_{R^p}mG_x\,dx=mG \qquad (2)$$

因$mG<+\infty$，故mG_x可积，从而由§4定理 6 知，R^p上函数mG_x几乎处处取有限值。 但截面 G_x 实际上就是将 x 固定，而把 $f(x,y)$看作 y的函数（此时它的定义域是R^q）时的下方图形，因此我们证明了几乎对所有的 $x\in R^p$,当把 $f(x,y)$看作 y的函数时，其下方图形可测且测度有限， 于是仍由§6 定理 1 得证 (i);

还是由于 G_x是将 $f(x,y)$看作 y的函数时的下方图形，从而由§6定理 1 便有

$$mG_x=\int_{R^q}f(x,y)\,dy\quad P.P.\text{于}\ R^p$$

这证明了(ii)且结合式（1）及（2）得

$$\int_{R^{p+q}} f(p)\,dp = mG = \int_{R^p}\left[\int_{R^q} f(x,y)\,dy\right]dx$$

$$= \int_{R^p} dx \int_{R^q} f(x,y)\,dy.$$

所以对非负可测函数定理得证。

2° 设 $f(p)$是一般的可积函数， 我们仍然考虑非负可测函数 $f^+(p)$和 $f^-(p)$。因为 $f(p)$可积，所以 $f^+(p)$，$f^-(p)$ 都是可积的，于是从 1°知， 几乎对所有的 $x\in R^p$，$f^+(x,y)$ 是 R^q上关于 y的可积函数. 同理，几乎对所有的 $x\in R^p$,$f^-(x,y)$ 也是 R^q上关于 y 的可积函数，于是 $f(x,y)$ 也几乎对所有的 $x\in R^p$都是 R^q上关于 y的可积函数（证得(i)）；又因

$$g_1(x) = \int_{R^q} f^+(x,y)\,dy,\quad g_2(x) = \int_{R^q} f^-(x,y)\,dy$$

都是R^p上几乎处处有定义的可积函数，所以

$$g(x) = \int_{R^q} f^+(x,y)\,dy - \int_{R^q} f^-(x,y)\,dy = \int_{R^q} f(x,y)\,dy$$

也是 R^p上几乎处处有定义的可积函数（证得(ii)）。

最后，由1°显然有

$$\int_{R^{p+q}} f(p)\,dp = \int_{R^{p+q}} f^+(p)\,dp - \int_{R^{p+q}} f^-(p)\,dp$$

$$= \int_{R^p} dx \int_{R^q} f^+(x,y)\,dy - \int_{R^p} dx \int_{R^q} f^-(x,y)\,dy$$

$$= \int_{R^p} dx\left\{\int_{R^q} f^+(x,y)\,dy - \int_{R^q} f^-(x,y)\,dy\right\}$$

$$= \int_{R^p} dx \int_{R^q} f(x,y)\,dy$$

定理全部证毕。

推论 1 若 $f(x,y)$在 $R^{p+q}=R^p\times R^q$上可积，则

$$\int_{R^p} dx\int_{R^q} f(x,y)\,dy = \int_{R^q} dy\int_{R^p} f(x,y)\,dx$$

证明 这是显然的。

推论 2　若 $f(p)$ 在 R^{p+q} 上非负可测，则

(i) 几乎对所有的 $x\in R^p$，$f(x,y)$ 是 R^q 上关于 y 的非负可测函数；

(ii) 下述等式成立

$$\int_{R^{p+q}} f(p)\,dp=\int_{R^p} dx\int_{R^q} f(x,y)\,dy=\int_{R^q} dy\int_{R^p} f(x,y)\,dx$$

证明　由定理 2 证明中的1°部分即得。

习　　题

1. 证明

$$f(x,y)=\frac{1}{x^\alpha(1-y)^\beta}\quad 0<\alpha<1$$

$0<\beta<1$，在$E=[0,\ 1;\ 0,\ 1]$ 上可积，并求其积分的值。

2. 设$f(x)$在 R^p 上可积，$g(y)$在 R^q上可积，证明 $f(x)\cdot g(y)$ 在 $R^p\times R^q$上可积，且

$$\int_{R^{p+q}} f(x)g(y)\,dxdy=\left(\int_{R^p} f(x)\right)\left(\int_{R^q} g(y)\,dy\right)$$

3. 在 $E=[0,\ 1;\ 0,1]$上定义函数

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

证明

$$\int_{(0,1)} dx\int_{(0,1)} f(x,y)\,dy\neq\int_{(0,1)} dy\int_{(0,1)} f(x,y)\,dx$$

这是否与富必尼定理矛盾？为什么？

§8　微分与积分间关系

在本节里，我们主要是研究函数的微分与积分间关系，且在R^1中的闭区间 $[a,b]$上进行讨论。

一、有界变差函数

定义1 对区间〔a,〕上的函数 $f(x)$，设

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

是〔a,b〕上的一组分点，它所作成的分划用T表示，令

$$V_a^b[f,T]=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|$$

如果存在常数 $M\geqslant 0$，使对〔a,b〕的任意分划T，恒有

$$V_a^b[f,T]\leqslant M$$

则称 $f(x)$为〔a,b〕上的**有界变差函数**。这样的常数M的下确界，称作 $f(x)$在〔a,b〕上的**总变差**，记为$V_a^b(f)$。且把〔a,b〕上一切有界变差函数组成的集合记作 $V[a,b]$。

由 $f(x)$在〔a,b〕上的总变差定义，显然有

$$V_a^b(f)=\sup_T\{V_a^b[f,T]\}$$

从而对任意 $\varepsilon>0$，必相应地有分划T_ε，使

$$V_a^b[f,T_\varepsilon]>V_a^b(f)-\varepsilon$$

另外很明显，对〔a,b〕的任二分划 T'、T，若T'比T细时，必有

$$V_a^b[f,T]\leqslant V_a^b[f,T']$$

例1 〔a,b〕上的单调函数必是有界变差函数。

证明 只须求得对任意分划T，恒使

$$V_a^b[f,T]\leqslant M$$

成立的常数M。为确定起见，不妨假定 $f(x)$在〔a,b〕上是单调不减的。此时显然取 $M=f(b)-f(a)$即可。

事实上，很明显对〔a,b〕任取一组分点

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$$

用T表此分划，则恒有

$$V_a^b[f,T]=\sum_{i=0}^{n-1}|f(t_{i+1})-f(t_i)| =\sum_{i=0}^{n-1}[f(t_{i+1})-f(t_i)]$$

$$=f(t_n)-f(t_0)=f(b)-f(a)=M$$

因此 $f(x)$是 $[a,b]$上的有界变差函数.

例 2 设 $[a,b]$上函数 $f(x)$满足李卜希兹((Lipschitz)条件，即存在常数 $c>0$，使对任何x，$x'\in[a,b]$，皆有

$$|f(x)-f(x')|\leqslant c\,|x-x'| \qquad (1)$$

则 $f(x)$是 $[a,b]$上的有界变差函数.

证明 设 $c>0$合于式（1）．则取 $M=c(b-a)$ 即可．事实上，对$[a,b]$的任意分划T，显然有

$$V_a^b[f,T]=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}c\,|x_{i+1}-x_i|$$

$$=c\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=c(b-a)=M$$

下面讨理有界变差函数的性质.

定理 1 设 $f(x)$是 $[a,b]$上有界变差函数，则

（1）$a<c<b$，$f(x)$也是 $[a,c]$ 上的有界变差函数；

（2）设 $x\in[a,b]$，令

$$V(x)=V_a^x(f)$$

则 $V(x)$是$[a,b]$上有定义的函数，且是非负单调不减的.

证明 由有界变差函数及总变差定义直接推得.

定理 2 若 $f(x)\in V[a,b]$，则 $f(x)$在$[a,b]$上必有界.

证明 因 $f(x)\in V[a,b]$，故 $V_a^b(f)$必存在，对任意$x\in[a,b]$，T表示由三点 a，x，b构成的分划，则有

$$|f(x)|-|f(a)|\leqslant|f(x)-f(a)|\leqslant|f(x)-f(a)|$$
$$+|f(b)-f(x)|=V_a^b[f,T]\leqslant V_a^b(f)$$

从而有

$$|f(x)| \leqslant |f(a)| + V_a^b(f) = K$$

由x的任意性得证 $f(x)$在 $[a,b]$上有界。

定理 3 若 $f(x)$，$g(x) \in V[a,b]$；α,β 是任二实数，则

（1）$\alpha f(x) + \beta g(x) \in V[a,b]$；

（2）$f(x) \cdot g(x) \in V[a,b]$。

证（1） 设T是 $[a,b]$任一分划，则有

$$V_a^b[\alpha f + \beta g,\ T] = \sum_{i=0}^{n-1} |[\alpha f(x_{i+1}) + \beta g(x_{i+1})] - [\alpha f(x_i)$$

$$+ \beta g(x_i)]| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \{|\alpha[f(x_{i+1}) - f(x_i)]| + |\beta[g(x_{i+1})$$

$$- g(x_i)]|\} \leqslant |\alpha| \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

$$+ |\beta| \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| = |\alpha| V_a^b[f,T]$$

$$+ |\beta| V_a^b[g,T] \leqslant |\alpha| V_a^b[f] + |\beta| V_a^b[g]$$

故 $$\alpha f(x) + \beta g(x) \in V[a,b]$$

证（2） 由定理 2 知，存在K_1，$K_2>0$，使

$$|f(x)| \leqslant K_1,\quad |g(x)| \leqslant K_2 \quad (x \in [a,b])$$

于是对 $[a,b]$之任一分划T有

$$V_a^b[f \cdot g, T] = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) g(x_{i+1}) - f(x_i) g(x_i)|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \{|f(x_{i+1}) g(x_{i+1}) - f(x_i) g(x_{i+1})|$$

$$+ |f(x_i) g(x_{i+1}) - f(x_i) g(x_i)|\} \leqslant K_2 \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1})$$

$$-f(x_i)| + K_1\sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|$$

$$\leqslant K_2V_a^b(f) + K_1V_a^b(g)$$

所以

$$f(x)g(x)\in V[a,b]$$

定理 4 若 $f(x)\in V[a,b]$，对任意 $C\in(a,b)$，则有

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

证明 左≤右 对 $[a,b]$的任意分划

$$T: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

若 c是分划T的分点，如 $c = x_{i_0}$，则显然

$$T': \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i_0} = c$$

$$T'': \quad c = x_{i_0} < x_{i_0+1} < \cdots < x_n = b$$

分别是 $[a,c]$，$[c,b]$的分划，且有

$$V_a^b[f,T] = V_a^c[f,T'] + V_c^b[f,T'']\leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f) \qquad (1)$$

若 c不是分划T的分点，且 $x_j < c < x_{j+1}$，则

$$T^*: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_j < c = c$$

$$T^{**}: \quad c = c < x_{j+1} < \cdots < x_n = b$$

分别是 $[a,c]$，$[c,b]$的分划，且因

$$|f(x_{j+1}) - f(x_j)| \leqslant |f(x_{j+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_j)|$$

所以显然有

$$V_a^b[f,T]\leqslant V_a^c[f, T^*] + V_c^b[f, T^{**}]$$

$$\leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f) \qquad (2)$$

由于分划T的任意性，结合式（1），（2）及总变差定义，则有

$$V_a^b(f) = \sup_T\{V_a^b[f,T]\}\leqslant V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

左≥右 设 T_1，T_2 分别是 $[a,c]$ 和 $[c,b]$的任意分划，

合并 T_1，T_2 则得 $[a, b]$ 之一分划 T，于是

$$V_a^c(f, T_1)+V_c^b(f, T_2)=V_a^b(f,T)\leqslant V_a^b(f)$$

由于分划 T_1，T_2的任意性，便得

$$V_a^c(f)+V_c^b(f)\leqslant V_a^b(f)$$

综上所述，便有

$$V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f)$$

定理证毕。

定理 5 $f(x)$是$[a,b]$上有界变差函数的充要条件是 $f(x)$ 可以表为两个不减的非负函数的差。

证明 充分性 由例1知不减函数必是有界变差函数，又由定理3知任二有界变差函数的差函数仍是有界变差函数，于是证得条件的充分性。

必要性 已知 $f(x)$是 $[a,b]$ 上有界变差函数，往证必存在两个不减的非负函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，使 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$。为此关键在于利用 $f(x)$ 的有界变差性构造合于要求的函数 $f_1(x)$和 $f_2(x)$。

事实上，因为 $f(x)$是 $[a,b]$上有界变差函数， 从而由定理1知， $V(x)=V_a^x(f)$是 $[a,b]$ 上非负不减函数，且

$$|f(x)-f(a)|\leqslant V_a^x(f)=V(x) \quad (x\in[a,b])$$

从而有

$$f(x)-f(a)\leqslant V(x),\ V(x)+f(a)-f(x)\geqslant 0 \ (x\in[a,b])$$

令 $\quad r(x)=V(x)+f(a)-f(x)$，则有

$$f(x)=V(x)+f(a)-r(x) \quad (x\in[a,b]) \qquad (1)$$

且 $r(x)\geqslant 0$，又若 $x_1>x_2$，则

$$r(x_1)-r(x_2)=V(x_1)-V(x_2)-[f(x_1)-f(x_2)]$$
$$=V_{x_2}^{x_1}(f)-[f(x_1)-f(x_2)]$$
$$\geqslant V_{x_2}^{x_1}(f)-|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 0$$

所以 $r(x)$是不减函数（至此知 $r(x)$是 $[a,b]$ 上非负不减函数）。

考虑到式（1）中的函数 $V(x)+f(a)$，由于$V(x)$ 非负不减所以它不减是明显的，但未必非负，为此，我们可令

$$f_1(x)=V(x)+f(a)+|f(a)|$$

$$f_2(x)=r(x)+|f(a)|$$

于是显然 $f_1(x)$，$f_2(x)$皆是 $[a,b]$上非负不减函数，且注意到式（1）则有

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)$$

定理证毕。

定理5启示我们，对有界变差函数的研究可以转化为对非负不减函数的讨论，显然这将给予问题的讨论以方便。

定义2* 设 $f(x)$是 $[a,b]$ 上的函数，$x_0\in[a,b]$，对任意 $\delta>0$，令

$$M_\delta(x_0)=\sup_{\substack{x\in[a,b]\\0<|x-x_0|<\delta}}\{f(x)\},\qquad m_\delta(x_0)=\inf_{\substack{x\in[a,b]\\0<|x-x_0|<\delta}}\{f(x)\}$$

当$\delta\to0$（$x\to x_0$）时，我们分别称 $f(x)$在 x_0 的上、下极限为：

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\(\delta\to0)}}}f(x)=\inf_\delta\{M_\delta(x_0)\},\quad \underline{\lim_{\substack{x\to x_0\\(\delta\to0)}}}f(x)=\sup_\delta\{m_\delta(x_0)\}$$

定义3 对于 $[a,b]$上函数 $f(x)$及 $x_0\in[a,b]$，令

$$D^+f(x_0)=\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$D_+f(x_0)=\underline{\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

---

* 这是第四章§1定义7的特殊情况。

$$D^- f(x_0) = \overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$D_- f(x_0) = \underline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

我们知道对 $[a, b]$ 上任意函数 $f(x)$ 及定点 $x_0 \in [a, b]$，上述上、下极限总是存在的。我们分别称 D^+，D_+，D^-，D_- 为 $f(x)$ 在 x_0点处的**右上，右下，左上，左下导数**。

若$D^+f(x_0) = D_+f(x_0)$时，则称其共同值为 $f(x)$ 在 x_0点的**右导数**，记为 $f_+'(x_0)$；若 $D^-f(x_0) = D_-f(x_0)$ 时，则称其共同值为 $f(x)$ 在 x_0点的**左导数**，记为 $f_-'(x_0)$。

若左、右导数皆存在且相等，即

$f_+'(x_0) = f_-'(x_0) = D^+f(x_0) = D_+f(x_0) = D^- f(x_0) = D_-f(x_0)$

时，则称 $f(x)$在 x_0点可导（或可微分），且称上式共同值为其导数，纪为 $f'(x_0)$。

容易看出，对于 $[a, b]$上有限函数来说，上述可导定义与数学分析中的可导概念是一致的，不同的是，这里的导数可取无穷大为其值。并且根据上述定义可直接得证下列诸等式：

$$D^+(-f) = -D_+f, \quad D^-(-f) = -D_-f$$

又若 $y = -x$，$g(x) = -f(y)$，则有$D^+g(x) = D^-f(y)$，$D_+g(x) = D_-f(y)$。

例3 考察符号函数

$$f(x) = sgn x = \begin{cases} 1 & 当\ x > 0\ 时 \\ 0 & 当\ x = 0\ 时 \\ -1 & 当\ x < 0\ 时 \end{cases}$$

在$x = 0$处的导数。

解 显然有

$$\overline{\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\overline{\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}}\frac{1}{x}=+\infty;\quad \underline{\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\overline{\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\overline{\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}}}-\frac{1}{x}=+\infty;\quad \underline{\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}}}\frac{-1}{x}=+\infty$$

从而

$$D^{+}f(0)=D_{+}f(0)=D^{-}f(0)=D_{-}f(0)=+\infty$$

即 $$f'(0)=+\infty$$

定理 6 设 $f(x)$ 是〔a,b〕上单调函数，则 $f(x)$ 必在〔a,b〕上几乎处处可微。

证明 因较冗繁故从略。读者可参看主要参考文献〔1〕第五章§8。

推论 1 有界变差函数几乎处处可微。

证明 由定理 5 及定理 6 即得。

二、不定积分

在这一部分里，我们主要是讨论勒贝格积分的不定积分问题。

在黎曼积分中已知连续函数的不定积分与原函数是一致的，即牛顿—莱布尼兹（Newton—Leibniz）公式成立。但当函数不连续时，未必是可积的，即或可积，其不定积分也未必是其原函数。而就区间上的函数研究勒贝格积分时，只要函数在区间上可积，则其不定积分必与原函数一致，这一结果也是勒贝格积分优越于黎曼积分的又一方面。

定理 7 设 $f(x)$ 是〔a,b〕上单调不减函数，则导函数 $f'(x)$ 必是可积函数，且有

$$\int_{[a,b]}f'(x)dx\leqslant f(b)-f(a)\qquad (1)$$

证明　只须构造可测函数列$\{\varphi_n(x)\}$，使$f'(x)$为其极限函数。又因$f'(x)\geqslant 0$，从而$f'(x)$非负可测故有积分值，然后用法都引理证得式（1）成立，这就意味着$f'(x)$可积。

事实上，1°　不失一般性，可扩大定义区间$[a,b]$为$[a,b+1]$，并用$\tilde{f}(x)$代替$f(x)$来讨论，这里

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & a\leqslant x\leqslant b \\ f(b) & b<x\leqslant b+1 \end{cases}$$

显然这时$f(x)$的导函数$f'(x)$与$\tilde{f}(x)$的导函数$\tilde{f}'(x)$的可积性相同，当可积时，积分值也相同。

对任一自然数n，作函数

$$\varphi_n(n)=\frac{\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\tilde{f}(x)}{\frac{1}{n}}\quad(n=1,\ 2,\cdots)$$

因为$\tilde{f}(x)$及$\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)$都是不减函数，所以对任意实数$c$，恒有

$$\{x|\tilde{f}(x)>c\}=\text{ 区间或 }\phi$$

从而$\tilde{f}(x)$，$\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)$都是可测函数，于是$\varphi_n(x)$都是可测函数且有$\varphi_n(x)\geqslant 0$，显然对$f(x)$存在导数$f'(x)$的点$x$，有

$$\tilde{f}'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\tilde{f}(x)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\quad(2)$$

因为$\tilde{f}(x)$在$[a,\ b+1]$上是单调函数，故由定理6知$\tilde{f}(x)$几乎处处可微。即$\tilde{f}'(x)$是几乎处处收敛的可测函数列$\{\varphi_n(x)\}$的极限函数，故$\tilde{f}'(x)$可测且$\tilde{f}'(x)\geqslant 0$，所以$\tilde{f}'(x)$（从而$f'(x)$）在$[a,b]$上有积分值。

$2°$　因$\{\varphi_n(x)\}$是非负可测函数列，且式（2）成立，故由§5定理4（法都引理）知

$$\int_{[a,b]} f'(x)dx = \int_{[a,b]} \varliminf_{n\to\infty} \varphi_n(x)dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n(x)dx$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} n \int_{[a,b]} \left[\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right) - \tilde{f}(x)\right]dx \tag{3}$$

但因

$$\int_{[a,b]} \tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)dx = \int_{[a+\frac{1}{n},\, b+\frac{1}{n}]} \tilde{f}(x)dx$$

且闭区间$[a,b]$上单调函数$\tilde{f}(x)$必黎曼可积，所以有

$$\int_{[a,b]} \left[\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right) - \tilde{f}(x)\right]dx = \int_b^{b+\frac{1}{n}} \tilde{f}(x)dx -$$

$$\int_a^{a+\frac{1}{n}} \tilde{f}(x)\ dx \leqslant \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(b)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)dx$$

$$= \frac{1}{n}f(b) - \frac{1}{n}f(a) = \frac{1}{n}[f(b) - f(a)]$$

（图5—3）于是结合式（3）便有

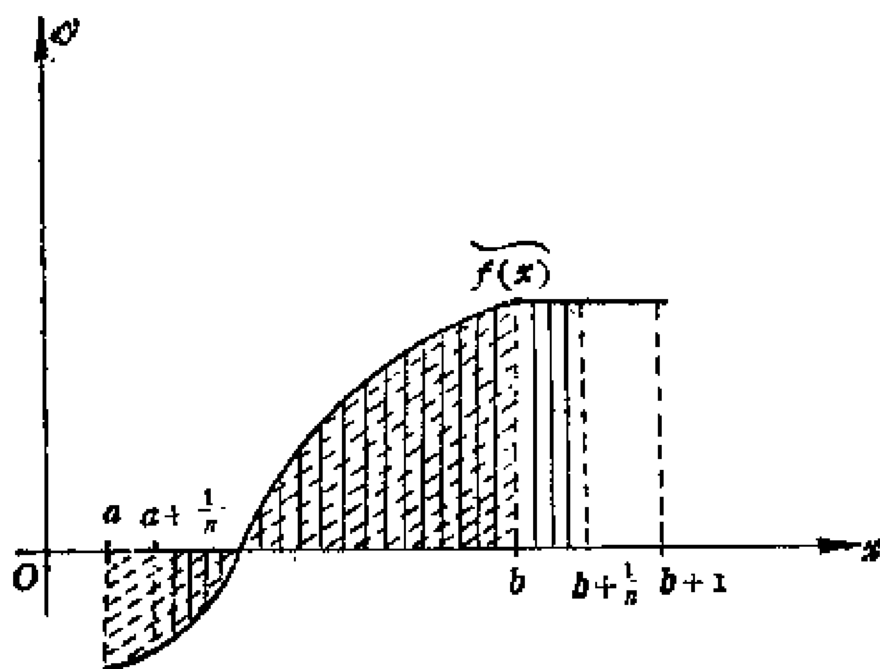


图5—3

$$\int_{[a,b]} f'(x)dx \leqslant f(b)-f(a)$$

在习惯上，我们常常以为导函数的积分即为原函数，因此对定理中的不等号会感到遗憾。事实上，就一般情况来说式（1）中的等号未必成立，因为确有合条件的但使不等号成立的函数存在。

定义4 设 $f(x)$是〔a,b〕上的函数，若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$ 是〔a,b〕上任意一族互不相交的开区间，

$$只要\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta,\quad 便有\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$$

则称 $f(x)$为〔a,b〕上的**绝对连续函数**。

定理8 〔a,b〕上绝对连续函数 $f(x)$，既是一致连续的又是有界变差的。

证明 1° 对任意 $\varepsilon>0$，由绝对连续函数定义应有$\delta>0$，使对〔a,b〕的任意一组分点，$x_1<x_2$，只要 $|x_1-x_2|=x_2-x_1<\delta$，就有$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$，从而 $f(x)$是一致连续函数。

2° 令 $\varepsilon=1>0$，因$f(x)$是绝对连续函数，所以存在 $\delta>0$，使对〔a,b〕的任意一组分点：$a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_n<b_n$。只要

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta,就有\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<1$$

取〔a,b〕的一个分划 T'：

$$a=c_0<c_1<c_2<\cdots<c_M=b$$

使$c_k-c_{k-1}<\delta$ ($k=1,2,\cdots,M$)，于是对每个 $k=1,2,\cdots M$，恒有$V_{c_{k-1}}^{c_k}(f)\leqslant 1$，从而$\sum_{k=1}^{M}V_{c_{k-1}}^{c_k}(f)\leqslant M$。

设T是$[a,b]$之任一分划，令T''是由T与T'的分点全体组成的分划，于是有

$$V_a^b[f,T]\leqslant V_a^b[f,T'']\leqslant\sum_{k=1}^{M}V_{x_{k-1}}^{x_k}(f)\leqslant M$$

从而由分划T的任意性得证$V_a^b(f)\leqslant M$.

推论 2 $[a,b]$上绝对连续函数$f(x)$几乎处处可微，且其导函数$f'(x)$是可积的.

证明 由定理8知绝对连续函数$f(x)$必是有界变差函数，从而由推论1知$f(x)$几乎处处可微。又因有界变差函数可表为两个不减函数的差（定理5），于是由定理7知导函数$f'(x)$是可积的.

定理 9 若$f(x)$与$g(x)$皆是绝对连续的，则$f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$也都绝对连续，又若$g(x)\neq 0$，则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$也绝对连续。

证明 只须从绝对连续函数定义出发，对任意$\varepsilon>0$，确定合于条件的$\delta>0$。

1° 因已知$f(x)$，$g(x)$皆绝对连续，故对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta_1>0$，$\delta_2>0$，使对$[a,b]$的任意一族互不相交的开区间$\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$

$$当\ \sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta_1\ 时，\ 有\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(1)$$

$$当\ \sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta_2 时，\ 有\sum_{i=1}^{n}|g(b_i)-g(a_i)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(2)$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$，则当$\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$时，式（1）及（2）

同时成立，于是对 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ 时，便有

$$\sum_{i=1}^{n}|[f(b_i)\pm g(b_i)]-[f(a_i)\pm g(a_i)]|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}[|f(b_i)-f(a_i)|+|g(b_i)-g(a_i)|]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|+\sum_{i=1}^{n}|g(b_i)-g(a_i)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

2° 因绝对连续函数必为有界变差函数（定理 8）从而必为有界函数（定理 2），于是存在 $A, B>0$，使 $|f(x)|\leqslant A$，$|g(x)|\leqslant B$。所以从

$$\begin{aligned}|f(b_i)g(b_i)-f(a_i)g(a_i)|&\leqslant|f(b_i)g(b_i)-f(a_i)g(b_i)|\\&+|f(a_i)g(b_i)-f(a_i)g(a_i)|\leqslant|g(b_i)||f(b_i)-f(a_i)|\\&+|f(a_i)||g(b_i)-g(a_i)|\leqslant B|f(b_i)-f(a_i)|\\&+A|g(b_i)-g(a_i)|.\end{aligned}$$

便知 $f(x)g(x)$ 是绝对连续函数。

3° 因 $g(x)$ 绝对连续且 $g(x)\neq0$，从而 $|g(x)|\geqslant\sigma>0$，于是有

$$\left|\frac{1}{g(b_i)}-\frac{1}{g(a_i)}\right|\leqslant\frac{|g(b_i)-g(a_i)|}{\sigma^2}$$

所以 $\frac{1}{g(x)}$ 绝对连续，于是由2°知 $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$ 绝对连续。定理全部证毕。

定理10 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上绝对连续函数，且 $f'(x)=$

0 P.P. 于$[a,b]$，则 $f(x)$是常值函数。

证明 第一步往证 $f(b)=f(a)$。

1° 对任意$\varepsilon>0$，由 $f(x)$的绝对连续性，应有 $\delta>0$，使当 $[a,b]$中互不相交的开区间族 $\{(c_i, d_i)\}_{i=1}^{n}$ 的总长度小于 δ 时，就有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(d_i)-f(c_i)|<\varepsilon \tag{1}$$

令 $E=\{x|f'(x)=0\}$，由条件知

$$m\{[a,b]-E\}=0$$

于是对上述之$\delta>0$，必有开集G使

$$G\supseteq[a,b]-E,\quad 且\ mG<\delta$$

设G的构成区间族为 $\{(a_i, b_i)\}$，则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{k}(a_i,b_i)\right)=\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)=mG<\delta \quad (K有限或\infty)$$

因若 $y_0\in[a,b]-G\subseteq E$时，则 $f'(y_0)=0$，于是由导数定义，对$\varepsilon>0$，应有 $h>0$，使当 $y\in(y_0-h, y_0+h)$时，有

$$\left|\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}\right|<\varepsilon \tag{2}$$

于是开区间族

$$\{(a_i, b_i)|i=1, 2, \cdots, k;\ k\ 有限或\ \infty\}\cup\{(y_0-h,y_0+h)|y_0\in[a,b]-G,\ h\ 合于式(2)\} \tag{3}$$

显然是 $[a,b]$之一开复盖，故由第二章§3紧致性定理知，开区间族式（3）中必有有限个开区间，不妨记为

$$(a_1, b_1), \cdots, (a_l, b_l), (y_1-h, y_1+h), \cdots, (y_p-h_p, y_p+h_p) \tag{4}$$

复盖住 $[a,b]$。

2° 在式（4）给出的下述点集

$$\{a_i, \ b_i, \ y_j | \ i=1, \ 2, \ \cdots, \ l; \ j=1, \ 2, \ \cdots, \ p\}$$

中再适当加入有限个分点，使其组成 $[a, b]$ 之一分点组

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{q-1}<x_q<\cdots<x_n=b$$

且使每个开区间 $(x_{q-1}, \ x_q)$ 至少合于下述情况之一：

(Ⅰ) $(x_{q-1}, \ x_q)$ 包含在某个 $(a_i, \ b_i)$ 中；

(Ⅱ) $x_{q-1}=y_j$ $(x_{q-1}, \ x_q)\subseteq(y_j, \ y_j+h_j)$；

(Ⅲ) $x_q=y_j$, $(x_{q-1}, \ x_q)\subseteq(y_j-h_j, \ y_j)$。

从而有

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\sum_{q=1}^{n}|f(x_q)-f(x_{q-1})|$$
$$=\Sigma'|f(x_q)-f(x_{q-1})|+\Sigma''|f(x_q)-f(x_{q-1})|$$

其中 Σ' 表示对合于(Ⅰ)的 $(x_{q-1}, \ x_q)$ 求和； Σ'' 表示对合于(Ⅱ)及(Ⅲ)的 $(x_{q-1}, \ x_q)$ 求和。于是由式（1）及式（2）分别得

$$\Sigma'|f(x_q)-f(x_{q-1})|<\varepsilon$$

$$\Sigma''|f(x_q)-f(x_{q-1})|\leqslant\Sigma''\varepsilon(x_q-x_{q-1})=\varepsilon\Sigma''(x_q-x_{q-1})$$
$$\leqslant\varepsilon(b-a)$$

从而有

$$|f(b)-f(a)|<\varepsilon+\varepsilon(b-a)=\varepsilon(b-a+1)$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知有 $f(b)=f(a)$。

第二步。对任意 $x\in[a, b]$，用第一步方法对 $[a, x]$ 进行讨论，便得 $f(x)=f(a)$。于是得证 $f(x)$ 是一常值函数。

定义 5 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上可积函数，对 $x\in[a, b]$，则称

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$$

为 $f(x)$ 的**不定积分**，此处 C 可以是任何常数。不定积分由于常数 C 之不同而相异，所以 $f(x)$ 的不定积分的全体组成一无

限集，且该集中任何两个元素（$f(x)$的不定积分）彼此相差一个常数。

定理11 可积函数$f(x)$的不定积分$F(x)$是绝对连续函数。

证明 只须证明对任意 $\varepsilon>0$，恒有$\delta>0$，使对$[a,b]$内任意互不相交的开区间族$\{(a_i,\ b_i)\}_{i=1}^n$，只要$\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$，便有

$$\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|=\sum_{i=1}^{n}\left|\left[\int_a^{b_i}f(t)dt+c\right]-\left[\int_a^{a_i}f(t)dt+c\right]\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{a_i}^{b_i}f(t)\ dt\right|<\varepsilon$$

事实上，对任意 $\varepsilon>0$，因 $f(x)$可积， 故由§4定理12知，应有 $\delta>0$，使对 $[a,\ b]$ 内任意互不相交的开区间族 $\{(a_i,\ b_i)\}_{i=1}^n$，只要$m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i,\ b_i)\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}m(a_i,\ b_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$，便有（§4推论 2）

$$\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i,\ b_i)}|f(t)|\ dt=\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}|f(t)|\ dt<\varepsilon$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{a_i}^{b_i}f(t)dt\right|<\varepsilon$$

定理12 设 $f(x)$是 $[a,b]$上可积函数，

令
$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

则 $F'(x)=f(x)$ P.P.于 $[a,b]$。

此定理即是说， $[a,b]$上可积函数 $f(x)$ 的不定积分几乎处处可微，且其导函数几乎处处等于被积函数 $f(x)$。

证明1° 由定理11知 $F(x)$是绝对连续函数，从而由推论2知$F(x)$是几乎处处可微的。

2° 往证

$$\int_a^b |F'(x)|\,dx \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt \tag{1}$$

事实上，因为 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，则

$$F_+(x)=\int_a^x f^+(t)\,dt,\quad F_-(x)=\int_a^x f^-(t)\,dt \tag{2}$$

显然是两个单调不减函数，所以由定理6知，$F_+'(x)$，$F_-'(x)$几乎处处存在，且 $F_+'(x)\geqslant 0$，$F_-'(x)\geqslant 0$。又因

$$|F'(x)|=\left|\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'\right| \leqslant \left|\left[\int_a^x f^+(t)\,dt+\int_a^x f^-(t)\,dt\right]'\right|$$
$$=F_+'(x)+F_-'(x)$$

于是由定理7及式（2）得

$$\int_a^b |F'(x)|\,dx \leqslant \int_a^b F_+'(x)\,dx+\int_a^b F_-'(x)\,dx$$
$$\leqslant F_+(b)-F_+(a)+F_-(b)-F_-(a)$$
$$=\int_a^b f^+(t)\,dt+\int_a^b f^-(t)\,dt=\int_a^b |f(t)|\,dt$$

3° 往证 $F'(x)=f(x)$ P.P. 于 $[a,b]$。

因 $f(x)$在 $[a,b]$上可积，故由§4定理13知，对任意$\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$上的连续函数$\varphi(x)$，使得

$$\int_{[a,b]} |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon$$

对连续函数 $\varphi(x)$，若令

$$\Psi(x)=\int_a^x \varphi(t)\,dt$$

从数学分析中我们知道有$\psi'(x)=\varphi(x)$。

又因

$$\int_a^b |F'(x)-f(x)|\,dx=\int_a^b |F'(x)-\Psi'(x)+\Psi'(x)-$$

$$-f(x)|\,dx\leqslant\int_a^b |F'(x)-\Psi'(x)|\,dx+\int_a^b |\Psi'(x)-$$

$$f(x)|\,dx<\int_a^b |F'(x)-\Psi'(x)|\,dx+\varepsilon \qquad (3)$$

因为

$$F(x)-\Psi(x)=\int_a^x f(t)dt-\int_a^x \varphi(t)dt=\int_a^x (f(t)-$$

$$\varphi(t))dt$$

于是结合式（1），有

$$\int_a^b |F'(x)-\Psi'(x)|\,dx=\int_a^b |[F(x)-\Psi(x)]'|\,dx$$

$$\leqslant\int_a^b |f(t)-\varphi(t)|\,dt<\varepsilon \qquad (4)$$

将式（4）代入式（3），便得

$$\int_a^b |F'(x)-f(x)|\,dx<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

由$\varepsilon>0$的任意性，得证

$$F'(x)=f(x)\quad P.P.\text{于}\ [a,b]$$

定理13 牛顿——莱布尼兹公式

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)dt \qquad (*)$$

成立的充要条件是 $F(x)$是绝对连续函数。

证明 必要性 已知式(*)成立， 即 $F(x)$ 是可积函数 $F'(t)$ 的不定积分。于是由定理11知 $F(x)$ 是绝对连续函数。

充分性 已知 $F(x)$是绝对连续函数，于是由推论 2 知，$F'(x)$几乎处处存在且 $F'(x)$是可积的，故 $\int_a^x F'(t)dt$ 有意义。令

$$\Phi(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)dt \qquad (1)$$

显然 $\Phi(x)$也是绝对连续函数，且由定理12知，几乎处处成立着

$$\Phi'(x)=F'(x).$$

即 $(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=0$ 几乎处处成立，故由定理10知$\Phi(x)-F(x)$是一常数，但由式（1）可看出$\Phi(a)=F(a)$，即$\Phi(x)$与 $F(x)$相差的常数是零，所以 $\Phi(x)$与 $F(x)$是同一个函数，从而式(*)成立。

习　　题

1　证明　若$f(x)\in V[a,b]$，则 $|f(x)|\in V[a,b]$。

2　函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{当 } 0\leqslant x<1\text{时} \\ 5 & \text{当 } x=1\text{时} \\ x+3 & \text{当 } 1<x\leqslant 2\text{时} \end{cases}$$

在[0, 2]上的总变差等于多少？并验证之。

3　如果 $\{f_n(x)\}\subseteq V[a,b]$，　$V_a^b(f_n)\leqslant M$，　$n=1, 2, \cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，则 $f(x)\in V[a,b]$。

4　若函数 $f(x)$为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，且几乎处处存在非负导数，则$f(x)$为$[a,b]$上的单调不减函数。

5　证明在$[a, b]$上处处可微的单调函数为绝对连续函数。

6　试证函数

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2} & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x=0 \text{ 时} \end{cases}$$

在[−1, 1]上处处可微，但它不绝对连续。

第六章　平方可积函数

本章讨论一类很重要的函数：就是平方可积函数。早在泛函分析成为一门独立的学科以前，希尔伯特（Hilbert）在研究积分方程的求解与特征值理论时，就已经利用了满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2<+\infty$$

的序列 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$．他的具体作法是，利用一个标准正交系$\{x_n(t)\}$作出积分方程中未知函数的傅立叶（Fourier）系数，于是将第二类线性积分方程化成一个与之等价的无穷代数方程组．后来，有人以希尔伯特的理论与欧氏空间相比较，便称 $\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$为空间的点．假如

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2<+\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^2<+\infty$$

便定义 $\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$ 与 $\eta=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots)$两点间的距离为

$$\rho(\xi,\eta)=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k-\eta_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

这便是现在的所谓l_2空间．1907年，黎斯和福来歇（Fréchet）同时注意把l_2空间中的点改写成区间〔0，1〕上的函数，原来加于序列的条件自然变成条件

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt<+\infty$$

这就产生了本章所讨论的对象——L_2空间，它是无穷维空间中其性质与n维欧氏空间最为相似的一个空间。因此，我们将经常考虑这个空间与欧氏空间的异同，这样做，会有助于对新概念的来源及本质的了解。

§1 L_2 空 间

为简明起见，我们这里仅就在R^1中区间$E=[a, b]$上的函数进行讨论。当函数定义在任意可测集$E_0\subseteq E=[a, b]$上时，可令

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & 当\ x\in E_0 \\ 0 & 当\ x\in E-E_0 \end{cases}$$

从而仍可归结为上述情形，实际上只要E是测度有限的可测集，我们这里得到的结果仍然成立。

定义1 $[a, b]$上可测函数$f(x)$，满足

$$\int_a^b f^2(x)\,dx<+\infty$$

时，则称$f(x)$为**平方可积函数**。

$[a, b]$上所有平方可积函数组成的集合，记作$L_2[a,b]$，或简记为L_2。

定理1 L_2中的函数必属于L，即$L_2\subseteq L$。其中L表示所有勒贝格可积函数组成的集合。

证明 设$f(x)\in L_2$。因为$(|f(x)|-1)^2\geqslant 0$，从而有

$$|f(x)|\leqslant\frac{1+f^2(x)}{2}$$

于是由第五章定理11知$f(x)$是可积函数，故有$f(x)\in L$。

定理2 设f, $g\in L_2$，α、β是任二实数，则

（1）$f\cdot g$是可积函数，即 $f\cdot g\in L$；

（2）$\alpha f\pm\beta g$是平方可积函数，即 $\alpha f\pm\beta g\in L_2$。

证明（1）因 $(|f|-|g|)^2\geqslant 0$，从而有

$$|fg|\leqslant\frac{f^2+g^2}{2}$$

故 fg 可积。

（2）事实上，有

$$(\alpha f\pm\beta g)^2=\alpha^2f^2\pm 2\alpha\beta fg+\beta^2g^2$$

结合（1）便知上式右端是可积函数，从而 $\alpha f\pm\beta g$ 是平方可积函数。

由定理2便知，L_2是实数域上的线性空间。

对于L_2中的两个函数 $f(x)$和 $g(x)$，定义它们的内积为：

$$(f,\ g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

范数为：

$$\|f\|=\{(f,f)\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

距离为：

$$\rho(f,\ g)=\|f-g\|=\left\{\int_a^b(f-g)^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

容易验证内积有如下性质：

(i) $(f,\ f)\geqslant 0$，而 $(f,\ f)=0$ 的充要条件是 $f(x)=0$ $p\cdot p\cdot$于 $[a,\ b]$。

(ii) $(f,\ g)=(g,\ f)$。

(iii) $(\alpha f_1+\beta f_2,\ g)=\alpha(f_1,\ g)+\beta(f_2,\ g)$。其中 f，f_1，f_2，$g\in L_2$；α，β 皆实数。

下面我们证明L_2在上述距离之下是一个距离空间。

引理1 设 $f(x)$，$g(x)\in L_2$，则

$$|(f,\ g)|\leqslant\|f(x)\|\cdot\|g(x)\|$$

证明　因为对任何实数 h，都有

$$\int_a^b (hf(x)-g(x))^2dx$$

$$=h^2\int_a^b f^2(x)dx-2h\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\geqslant 0$$

所以，当我们把它看成h的方程式时，判别式应该不大于零，即

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2-4\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)\leqslant 0$$

移项，开方便得

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

亦即

$$|(f,\ g)|\leqslant\|f(x)\|\cdot\|g(x)\|$$

上述不等式通常称作许瓦兹（Schwarz）不等式。

引理 2　设 $f(x)$，$g(x)\in L_2$，则有

$$\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

证明　由许瓦兹不等式，有

$$2\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant 2\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

两端同时加以

$$\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx$$

则有

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx\leqslant\left[\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

两端开方，便得

$$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

上述不等式通常称为哥西(Cauchy)不等式.

定理 3 L_2配以距离

$$\rho(f,g)=\|f-g\|=\left(\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

成为一个距离空间，这里把几乎处处相等的函数视为同一函数.

证明 为证(L_2, ρ)是一距离空间（回顾第二章§1距离空间定义），只须证明ρ满足距离的三个条件：

(i) 显然有

$$\rho(f,g)=\left(\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$$

另外由第五章积分性质知,

$$\rho(f,g)=\left(\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}=0$$

当且仅当

$$f(x)-g(x)=0 \quad p\cdot p\cdot \text{ 于 } [a, b]$$

即 $$f(x)=g(x) \quad p\cdot p\cdot \text{ 于 } [a, b]$$

但我们已约定把几乎处处相等的函数视为同一函数，于是有：

$\rho(f, g)=0$ 的充要条件是 $f=g$

(ii) 由于

$$\left(\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_a^b [g(x)-f(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

所以有 $\rho(f, g)=\rho(g, f)$.

(iii) 往证 $\rho(f, g)\leqslant\rho(f, h)+\rho(h, g)$, $f, g, h\in L_2$.

事实上，因为

$$f(x)-g(x)=(f(x)-h(x))$$
$$+(h(x)-g(x))\ p\cdot p\cdot \text{ 于 } [a,\ b]$$

所以由引理2，有

$$\left(\int_a^b [f-g]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_a^b [(f-h)+(h-g)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\left(\int_a^b (f-h)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dx+\left(\int_a^b (h-g)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

即 $\rho(f,\ g)\leqslant\rho(f,\ h)+\rho(h,g)$

在 L_2 中引入上述的内积、范数、距离后，我们就称它为 L_2空间。因为L_2空间最初是希尔伯特提出的，因此L_2空间又称为希尔伯特空间。

习　　题

1．试在$[0,1]$上作一函数$f(x)$，使 $f(x)\in L$，而 $f^2(x)\bar{\in} L_2$。

2．证明L_2中的范数有如下性质：

（1） $\|f(x)\|\geqslant 0$，$\|f(x)\|=0$的充要条件是 $f(x)=0$；

（2） $\|\alpha f(x)\|=|\alpha|\cdot\|f(x)\|$；

（3） $\|f(x)+g(x)\|\leqslant\|f(x)\|+\|g(x)\|$。

3．试证：当 $f,\ g,\ h\in L_2$ 时

$$(\alpha f+\beta g,\ h)=\alpha(f,\ h)+\beta(g,\ h)$$

其中α,β是任意实数。

4．设E是一距离空间，距离为$\rho(\cdot,\cdot)$，则对E中任意三点x,y,z恒有

$$|\rho(x,\ z)-\rho(y,\ z)|\leqslant\rho(x,\ y)。$$

5．许瓦兹不等式

$$|(f,\ g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$$

中，等式成立的充要条件是f与g线性相关。

6．在L_2中证明

$$(f,\ g)=\frac{1}{4}(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2)$$

7．设$\{f_n\}$为L_2中的元素序列，$f\in L_2$．若$\|f_n\|\longrightarrow\|f\|$且$(f_n,\ f)\longrightarrow(f,\ f)$，则$\|f_n-f\|\longrightarrow 0(n\to\infty)$．

8．设E是一距离空间，距离为$\rho(\cdot,\cdot)$．E'是E的任一非空子集，则E'按距离ρ仍是一距离空间．

9．设E为任一非空集合，在E中定义距离

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1 & 当\ x\neq y\\ 0 & 当\ x=y\end{cases}$$

则E在上述距离下是一距离空间．

10．设$f(x)\in L_2$，证明

$$\int_a^b|f(x)|dx\leqslant\sqrt{b-a}\cdot\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

§2 平 均 收 敛

我们已经知道L_2空间是一距离空间，因此自然可象在n维欧氏空间里那样，借助距离而引入邻域、开集、闭集以及收敛等概念，然后在上述一些概念基础上展开一系列相应的讨论．

定义1　设$f\in L_2$，$\delta>0$，则称L_2中与f的距离小于δ的元素组成的集合为f的δ邻域，记为$N(f,\ \delta)$，即

$$N(f,\ \delta)=\{g\,|\,\rho(g,\ f)<\delta,\ g\in L_2\}$$

设E是L_2的一个子集，若对任意$f\in E$，都有f的某个邻域$N(f,\ \delta)\subseteq E$，则称E为开集；开集的补集为闭集．

定义2　设$f_n\in L_2$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，$f\in L_2$．如果对任意$\varepsilon>0$，存在相应的N，使当$n\geqslant N$时，恒有

$$\rho(f_n,\ f)=\|f_n-f\|<\varepsilon$$

成立，则称$\{f_n\}$平均收敛于 f，而称 f 为 $\{f_n\}$ 的极限．记作

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ 或 } f_n \to f \quad (n\to\infty)$$

由平均收敛的定义可知：

① 如用邻域叙述平均收敛，则为：对 f 的任意邻域 $N(f,\ \delta)$，存在相应的N，使当$n\geqslant N$时，恒有 $f_n\in N(f,\ \delta)$.

② 下面两种记号

$$f_n(x)\to f(x),\quad f_n\to f$$

在这里是有本质区别的．$f_n(x)\to f(x)$ 表示对固定的x，数列$\{f_n(x)\}$依通常意义收敛于 $f(x)$．而 $f_n\to f$ 则表示L_2中的元素列 $\{f_n\}$在定义 2 的意义下平均收敛于元素 f，也就是说，$f_n\to f$ 的意思是指

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2 dx = 0$$

平均收敛的概念在微分方程、概率论以及逼近论等许多方面都有着极为广泛的应用．

下面我们来讨论平均收敛的一些简单性质．

定理 1 （极限的唯一性）若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = g$，则 $f = g$.

证明 因$\rho(h,\ \varphi)=\|h-\varphi\|$满足三角不等式，故有

$$\begin{aligned}\|f-g\| &= \|(f-f_n)+(f_n-g)\| \\ &\leqslant \|f-f_n\| + \|f_n-g\| \qquad (1)\end{aligned}$$

因 $f_n\to f$，$f_n\to g$ $(n\to\infty)$ 即

$$\|f_n-f\|\to 0,\quad \|f_n-g\|\to 0 \quad (n\to\infty)$$

故式（1）右端收敛于零，从而$\|f-g\|=0$，于是有 $f-g=0$，即 $f=g$.

定理 2 （范数的连续性） 若$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\| =$

$\|f\|$.

证明 因 $\rho(f, g)=\|f-g\|$ 满足三角不等式，故有

$$\|f_n\|=\|f_n-f+f\|\leqslant\|f_n-f\|+\|f\|$$
$$\|f\|=\|f-f_n+f_n\|\leqslant\|f_n-f\|+\|f_n\|$$

从而有

$$\|f_n\|-\|f\|\leqslant\|f_n-f\|$$
$$\|f\|-\|f_n\|\leqslant\|f_n-f\|$$

于是有

$$\big|\,\|f_n\|-\|f\|\,\big|\leqslant\|f_n-f\|$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$，即 $\|f_n-f\|=\rho(f_n-f)\to 0(n\to\infty)$，故有 $\big|\,\|f_n\|-\|f\|\,\big|\to 0(n\to\infty)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|=\|f\|$$

从而定理得证。

推论 1 L_2中收敛序列的范数是有界的。

定理 3（内积的连续性） 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$，则对任意 $g\in L_2$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, g)=(f, g)$$

证明 由内积性质及许瓦兹不等式有

$$|(f_n, g)-(f, g)|=|(f_n-f, g)|\leqslant\|f_n-f\|\cdot\|g\|$$

而上式右端收敛于零，所以有

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, g)=(f, g)$$

定理 4 若 $\{f_n(x)\}$ 平均收敛于 $f(x)$，则 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$。

证明 对任意 $\sigma>0$，令

$$A_n(\sigma)=\{x\,|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}$$

则

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2dx \geqslant \int_{A_n(\sigma)} |f_n(x)-f(x)|^2dx \geqslant \sigma^2 mA_n(\sigma)$$

因$\{f_n(x)\}$平均收敛于$f(x)$，故上式左端收敛于零，而右端中的σ^2是一正值常数，故有

$$mA_n(\sigma)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

所以$f_n(x)\Longrightarrow f(x)$。

推论 2 若$\{f_n(x)\}$平均收敛于$f(x)$，则必有子列$\{f_{n_k}(x)\}$几乎处处收敛于$f(x)$。

证明 由定理 4 及第四章§6黎斯定理即知。

为了弄清L_2中的收敛与普通收敛之间的关系，我们考虑下述例子。

例 1 设$f(x)\equiv 0$，且

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x=0 \text{ 时}\\ n & \text{当 } 0<x<\frac{1}{n} \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时}\end{cases}$$

则在$[0,1]$上显然有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

而当把它看作L_2中的元素时，则有

$$\rho(f_n,f)=\left(\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{n}\to+\infty \quad (n\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$ 不成立。

例 2 设$f(x)\equiv 0$，$\{f_n(x)\}$是第四章§6定理 1 后面的函数列，且令$f_n(1)\equiv 1$，则

$$\rho(f_n,f)=\left(\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=m\left(\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right)=\frac{1}{n}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} f_n=f$$

但我们知道在〔0，1〕上 $f_n(x)$ 处处不收于 $f(x)$。

上述两个例子说明，函数列的平均收敛与通常的逐点收敛这两个概念是互不包含而各自独立的。

在许多问题中，函数列的所谓弱收敛也常起着重要的作用。

定义 3 设 $\{f_n(x)\}$ 是 L_2 中的函数列，如果有函数 $f(x)\in L_2$，使得对 L_2 中任一函数 $g(x)$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)\,dx=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛于 $f(x)$。

弱收敛的定义，如果用内积来叙述，则为：$\{f_n(x)\}$ 是 L_2 中的函数列，如果存在 $f(x)\in L_2$，使对任意 $g(x)\in L_2$，都有

$$(f_n,\ g)\to(f,\ g) \quad (n\to\infty)$$

关于弱收敛与平均收敛之间的关系，我们有下述定理。

定理 5 若 $\{f_n(x)\}$ 平均收敛于 $f(x)$，则 $\{f_n(x)\}$ 必弱收敛于 $f(x)$。

证明 设 $g(x)\in L_2$，则由许瓦兹不等式有

$$\left|\int_a^b g(x)f_n(x)\,dx-\int_a^b g(x)f(x)\,dx\right|^2$$

$$=\left|\int_a^b g(x)(f_n(x)-f(x))\,dx\right|^2$$

$$\leqslant\left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right]\cdot\left[\int_a^b (f_n(x)-f(x))^2dx\right]$$

于是有

$$\left|\int_a^b g f_n dx-\int_a^b g f dx\right|\leqslant\|g\|\cdot\|f_n-f\|$$

因 $\{f_n(x)\}$平均收敛于 $f(x)$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g f_n dx=\int_a^b g f dx$$

即 $\{f_n(x)\}$弱收敛于 $f(x)$。

定理 5 说明，L_2中的函数列平均收敛必弱收敛。但反之未必，其例可见本章学习指导中补充例题 7。

习　　题

1．证明：

（1）距离空间中任一闭集必可表为可列个开集的交；

（2）距离空间中任一开集必可表为可列个闭集的并。

2．设$f(x)$，$f_1(x)$，$f_2(x)$，…都是属于L_2的，并且$|f_n(x)|\leqslant f(x)$ $p.p.$于$[a,b]$　$(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=g(x)$ $p.p.$于$[a,b]$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=g$。

3．设 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，$\lim\limits_{n\to\infty}g_n=g$，求证

$$\lim_{n\to\infty}(f_n,g_n)=(f,g)$$

4．试不用黎斯定理直接证明本节的推论2。

5．设$f_n(x)\Longrightarrow f(x)$。若$\{f_n^2(x)\}$一致有界，则$\{f_n(x)\}$弱收敛于$f(x)$。

6．如果$\{f_n(x)\}$在L_2中弱收敛于$f(x)$且$\|f_n\|\to\|f\|$，则$\{f_n(x)\}$平均收敛于$f(x)$。

7．L_2中的弱收敛函数列未必是度量收敛的。

8．把题5中 $\{f_n(x)\}$ 一致有界的条件改为范数有界，即 $\|f_n\|\leqslant k$ $(n=1, 2, \cdots)$，结论仍然成立.

9．设 L^k_2 是 $[a, b]$ 上所有满足条件

$$|f(x)|\leqslant k \quad p.p. \text{于} [a, b]$$

的平方可积的可测函数作成的集合，则 L^k_2 是 L_2 的一个闭子集，并且在 L^k_2 中序列 $\{f_n(x)\}$ 平均收敛于 $f(x)$ 的充要条件是 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$。

§3 L_2空间的几个基本性质

一、完 备 性

我们知道，实直线 R^1 有一个重要性质，即 R^1 中任何哥西序列 $\{a_n\}$（即对任意 $\varepsilon>0$，恒存在 N，使当 n，$m\geqslant N$ 时，都有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$）必收敛，这就是通常所说的 R^1 的完备性．这一性质在数学分析中起着重要作用。但在一般的距离空间中未必都具有这种性质，现在我们将具有这种性质的距离空间分出来并给出如下定义。

定义1 设 (X,ρ) 是距离空间，$\{x_n\}$ 是 X 中点列，若对任给 $\varepsilon>0$，恒存在相应的 N，使当 m，$n\geqslant N$ 时，都有

$$\rho(x_m, x_n)<\varepsilon$$

则称 $\{x_n\}$ 是基本列．若距离空间 X 中任一基本列必收敛，则称该距离空间 X 为**完备的**。

由上述定义可以看出：

① 任何距离空间中的收敛列必是基本列。

② 完备距离空间中任何闭子集看作一个新的空间时也是完备的．

必须注意，一般说来①的逆不成立．因为存在着不完备的

距离空间。如R^1中的区间(0,1)及(0,1]按照距离$\rho(x,y)=|x-y|$都不是完备的距离空间，因为它们中的基本列未必收敛。比如$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是(0,1)中的基本列，但在(0,1)中不收敛（因$0\notin(0,1)$）。另外，容易看出有理数集Q，依距离$\rho(x,y)=|x-y|$也是不完备的距离空间。

我们已经在L_2中引入了距离，并且证明了它是距离空间，同时也给出了L_2中序列$\{f_n\}$的收敛定义——平均收敛。因此，人们自然要问，L_2空间是否完备？下面定理给出了肯定的回答。

定理1 L_2空间中点列$\{f_n\}$（平均）收敛的充要条件是，$\{f_n\}$是基本列（即对任意$\varepsilon>0$，恒有相应的N，使当m，$n\geqslant N$时，有$\|f_m-f_n\|=\rho(f_m,f_n)<\varepsilon$）。

证明 必要性 设$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，由平均收敛定义知，对任意$\varepsilon>0$，存在$N$，使当$n\geqslant N$时，有

$$\|f_n-f\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是，当n，$m\geqslant N$时，有

$$\|f_n-f_m\|\leqslant\|f_n-f\|+\|f-f_m\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

得证$\{f_n\}$是基本列。

充分性 证明比较繁冗，分两步进行：

第一步 构造$[a,b]$上的可测函数$f(x)$。

1° 已知$\{f_n\}$是基本列，从而对任意自然数k，恒存在相应的n_k，使当n，$m\geqslant n_k$时，有

$$\|f_n-f_m\|<\frac{1}{2^k}$$

成立。

显然，不妨设

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

于是有

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$$

因此有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty \qquad (1)$$

由§1许互兹不等式有

$$\int_a^b \left| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right| dx \leqslant \left(\int_a^b 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \left| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

即

$$\int_a^b \left| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right| dx \leqslant \sqrt{b-a} \cdot \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|$$

从而，结合式（1）知，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| dx$$

也是收敛的。

2° 令

$$F(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

则由第五章§5定理 2（勒贝格逐项积分定理），有

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b |f_{n_1}(x)| dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| dx$$

$$\leqslant \int_a^b |f_{n_1}(x)| dx + \sqrt{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < +\infty$$

即$F(x)$可积，于是由第五章§4定理6知

$$|F(x)|<+\infty \quad p \cdot p \cdot 于[a,\ b]$$

因此，级数

$$|f_{n_1}(x)|+\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|$$

是几乎处处收敛的，即级数

$$f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x))$$

几乎处处绝对收敛，当然它更应该是几乎处处收敛的。注意此级数的前m项的部分和即是$f_{n_{m+1}}(x)$，因此，极限

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

几乎处处存在（指取有限值）。

3° 在$[a,\ b]$上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) & 当\ x\in E_0=\{x\,|\,\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)有限\}\\ 0 & 当\ x\in[a,\ b]-E_0\end{cases}$$

显然$f(x)$是$[a,\ b]$上的可测函数，且在$[a,b]$上

$$f_{n_k}(x)\longrightarrow f(x)$$

几乎处处成立。

第二步 往证对第一步3°中定义的函数$f(x)$，有$f\in L_2$且$f_n\to f$。

因$\{f_n\}$是基本列，故对任意$\varepsilon>0$，存在N，使当$n,m\geqslant N$时，有

$$\|f_n-f_m\|<\varepsilon$$

取k_0使$n_{k_0}>N$，于是对任意$n\geqslant N$和任意$k\geqslant k_0$，都有

$$\int_a^b|f_n(x)-f_{n_k}(x)|^2dx=\|f_n-f_{n_k}\|^2<\varepsilon^2$$

因为

$$|f_n(x)-f(x)|^2=\lim_{k\to\infty}|f_n(x)-f_{n_k}(x)|^2$$

$$=\varliminf_{k\to\infty}|f_n(x)-f_{n_k}(x)|^2$$

于是应用第五章§5定理4（法都引理），得

$$\int_a^b|f_n(x)-f(x)|^2dx=\int_a^b\varliminf_{k\to\infty}|f_n(x)-f_{n_k}(x)|^2dx$$

$$\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_a^b|f_n(x)-f_{n_k}(x)|^2dx\leqslant\varepsilon^2\quad(*)$$

即当$n\geqslant N$时，恒有

$$\|f_n-f\|\leqslant\varepsilon$$

由$\varepsilon>0$的任意性，便得$\|f_n-f\|\to0$，即$f_n\to f\quad(n\to\infty)$。

另外，由式(*)知$f_n-f\in L_2$，因而$f\in L_2$。

综上定理证毕。

由本定理可知L_2空间是完备的。有些作者将此定理称作黎斯——费希尔(Riesz-Fisher)定理。应该强调指出，这是一个很重要的定理，它把傅立叶(Fourier)级数的理论大大地推进了一步。并且在许多场合都有着重要的应用。还应该指出的是，只有在新的积分理论之下才能有这一定理。它是不能通过对旧有积分的简单修改而得到的。因此通过它，人们可以再度看到新积分的优越性。

二、可 分 性

现在我们介绍关于距离空间的另一个重要概念，即可分性的概念，并进而讨论L_2空间的可分性。为此，先给出下述定义。

定义2 设A、B是距离空间X的子集，如果$\bar{B}\supseteq A$，则称B在A中稠密。

注：容易证明，稠密概念可换成下述几种说法：

1° 对任意$x\in A$及$\varepsilon>0$，存在 $y\in B$，使$\rho(x, y)<\varepsilon$。

2° 对任意 $\varepsilon>0$，以 B 中每点为心，以ε为半径的所有邻域的并包含A，即

$$A\subseteq\bigcup_{y\in B}N(y,\varepsilon)\quad(\varepsilon>0)$$

3° 对任意 $x\in A$，B中有点列$\{x_n\}$收敛于x。

应当注意，在稠密定义中，并不要求 $B\subseteq A$，甚至可能有$B\cap A=\phi$。

利用稠密的概念可以定义距离空间的可分性。

定义 3 设X是距离空间，如果X中存在一个可列的稠密子集，则称X为**可分的**。

n 维欧氏空间R^n是可分的。因为所有坐标为有理数的点组成的点集Q^n是R^n的可列稠密子集。

下面，我们讨论L_2空间的可分性。为此先给出两个定理。

定理 2（维尔斯特拉斯定理） 设 $f(x)$是〔a, b〕上的连续函数，则对任意 $\varepsilon>0$，存在多项式$P(x)$，使不等式

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

在〔a, b〕上一致地成立。

证明 从略。有兴趣的读者可参看主要参考文献〔3〕第四章§5。

定理 3 有界可测函数类、连续函数类及多项式函数类中的任何一个皆在L_2中稠密。

证明（1）往证有界可测函数类在L_2中稠密。为此，由定义 2 的注1°，只须证明对任意 $f\in L_2$及$\varepsilon>0$，总有有界可测函数g，使 $\rho(f, g)<\varepsilon$。

设 $f(x)\in L_2$ 。对任意 $\varepsilon>0$ ， 由积分的绝对连续性，有

$\delta>0$，使当

$$e\subseteq[a,b],\quad me<\delta$$

时，有

$$\int_e f^2(x)dx<\varepsilon^2$$

对上述的δ，可取到有界可测函数$g(x)$，使

$$m\{x\mid f(x)\neq g(x)\}<\delta$$

事实上，令

$$A_k=\{x\mid |f(x)|>k\},\quad Q=\{x\mid |f(x)|=+\infty\}$$

因 $f(x)\in L_2$，由§1定理1知，$f(x)\in L$，从而

$$|f(x)|<+\infty\ p\cdot p\cdot 于[a,\ b]$$

故 $mQ=0$。但由关系

$$A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_k\supseteq\cdots,\qquad Q=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$$

及第三章§3定理11，得

$$\lim_{k\to\infty}mA_k=mQ=0$$

故有k_0，使

$$mA_{k_0}<\delta$$

今在$[a,\ b]$上定义函数

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & x\in[a,\ b]-A_{k_0}\\ 0 & x\in A_{k_0}\end{cases}$$

显然$g(x)$是可测函数，且有

$$|g(x)|\leqslant k_0\quad (x\in[a,b])$$

而由$\{x\mid f(x)\neq g(x)\}\subseteq A_{k_0}$知

$$m\{x\mid f(x)\neq g(x)\}<\delta$$

于是有

$$\|f-g\|^2=\int_a^b|f-g|^2dx=\int_{\{x|f\neq g\}}|f-g|^2dx\leqslant\int_{A_{k_0}}f^2dx<\varepsilon^2$$

即

$$\rho(f,\ g)=\|f-g\|<\varepsilon$$

综上证得有界可测函数类在L_2中稠密。

（2）往证连续函数类在L_2中稠密。

设 $f(x)\in L_2$。对任意 $\varepsilon>0$，由（1）知存在有界可测函数 $g(x)$，使

$$\|f-g\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

设 $|g(x)|\leqslant k$。于是由第四章§5定理1（鲁金定理）知，有连续函数 $\varphi(x)$，合于

$$m\{x\,|g\neq\varphi\}<\frac{\varepsilon^2}{16k^2},\quad |\varphi(x)|\leqslant k$$

注意到 $|g(x)|\leqslant k$，$|\varphi(x)|\leqslant k$，从而$|g(x)-\varphi(x)|^2\leqslant 4k^2$。于是有

$$\|g-\varphi\|^2=\int_a^b|g-\varphi|^2dx=\int_{\{x|g\neq\varphi\}}|g-\varphi|^2dx$$

$$\leqslant 4k^2\cdot m\{x\,|g\neq\varphi\}<\frac{\varepsilon^2}{4}$$

因而，有

$$\|g-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$\rho(f,\varphi)=\|f-\varphi\|\leqslant\|f-g\|+\|g-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

（3）往证多项式函数类在L_2中稠密。

设 $f(x)\in L_2$。对任意$\varepsilon>0$，由(2)知存在连续函数$\varphi(x)$，使

$$\|f-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对上述的$\varepsilon>0$及$\varphi(x)$，由定理2，有多项式$p(x)$，使得

$$|\varphi(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}} \quad x\in[a,\ b]$$

于是有

$$\|\varphi-P\|^2=\int_a^b|\varphi-P|^2dx\leqslant\frac{\varepsilon^2}{4(b-a)}\cdot(b-a)=\frac{\varepsilon^2}{4}$$

即 $\quad\|\varphi-P\|<\frac{\varepsilon}{2}$

从而

$$\rho(f,P)=\|f-P\|\leqslant\|f-\varphi\|+\|\varphi-P\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

综上定理全部证毕。

定理 4 L_2空间是可分的。

证明 因有理系数多项式类是可列的，故只须证明有理系数多项式类是L_2的稠密子集。

设$f(x)\in L_2$，对任意$\varepsilon>0$，由定理3知存在多项式$P(x)$，使

$$\|f-P\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

下面证明有理系数多项式类在多项式类中稠密。

事实上，任取多项式

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k$$

对任意$\varepsilon>0$，取有理系数多项式

$$R(x)=\sum_{k=0}^{n}r_kx^k$$

使

$$|c_k-r_k|<\varepsilon/2(n+1)A^n(b-a)^{\frac{1}{2}} \quad k=0,1,2,\cdots,n$$

其中 $A=\max\{|a|, |b|, 1\}$. 则在 $[a, b]$ 上一致地有

$$|P(x)-R(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n}|c_k - r_k||x^k|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2(n+1)A^n(b-a)^{\frac{1}{2}}} \cdot (n+1)A^n$$

$$= \frac{\varepsilon}{2(b-a)^{\frac{1}{2}}}$$

于是有

$$\rho(P, R) = \|P-R\| = \left(\int_a^b |P(x)-R(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left[\int_a^b \left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

从而有

$$\rho(f, R) = \|f-R\| \leqslant \|f-P\| + \|P-R\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

综上证明了有理系数多项式类在L_2中稠密，而有理系数多项式类是可列的，从而L_2是可分空间.

三、非局部列紧性

迄今为止，我们尚未发现L_2空间与n维欧氏空间R^n有何重大差别，只知道它们同是距离空间，都有内积（R^n中两点 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的内积为 $(x, y)=\sum_{i=1}^{n}(x_i,y_i)$），并且都是完备的和可分的.下面我们要说明 R^n的一个重要性质不为L_2所具备，为此，先给出下述概念.

定义 4 设X是距离空间。如果X中的任一无限序列必有收敛子列，则称X为列紧的；如果对任意$p\in X$，恒有p的某一

邻域$N(p, \delta_0)$，使 $N(p, \delta_0)$ 中任一无限序列必有收敛子列，则称X为局部列紧的。

例 1　设 $X=[a, b]$，则X按通常的距离$\rho(x, y)=|x-y|$是一距离空间，且是列紧的。但R^1本身不是列紧的，因为自然数列 $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$是$R^1$中无限序列，但它没有收敛子列。另外，$R^1$中的半开区间$A=(0, 1]$按通常距离是一距离空间，而它不是列紧的，因为$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是$A$中无限序列，但它在$A$中没有收敛子列。

例 2　实直线R^1是局部列紧的。因为在欧氏空间中，波尔查诺——维尔斯特拉斯定理成立，所以欧氏空间是局部列紧空间。但这个重要性质L_2不具备，即L_2是非局部列紧空间。要证明这一问题，只要我们能在L_2中找到一点 f，使包含 f 的任何邻域中都至少有一无限序列没有收敛子列即可。

以下就$L_2[0, 1]$来考虑。取 $f=0\in L_2[0,1]$，对 $f=0$ 的任意邻域$N(0, \delta)$，取d，使 $\delta>d>0$，令

$$f_n(x)=d\cos(2n\pi x)\quad(n=1, 2, \cdots)$$

则有 $f_n(x)\in L_2[0, 1]$　$(n=1, 2, \cdots)$，且

$$\|f_n-f\|^2=\int_0^1 f_n^2(x)\,dx\leqslant d^2\int_0^1 1\,dx<\delta^2$$

即 $\rho(f_n,f)=\|f_n-f\|<\delta$，从而有

$$f_n\in N(0, \delta)$$

但只要$n\neq m$，就有

$$\|f_n-f_m\|^2=\int_0^1 d^2[\cos(2n\pi x)-\cos(2m\pi x)]^2\,dx$$

$$=d^2\int_0^1\cos^2(2n\pi x)\,dx+d^2\int_0^1\cos^2(2m\pi x)\,dx$$

$$-2d^2\int_0^1\cos(2n\pi x)\cos(2m\pi x)\,dx$$

$$= \frac{d^2}{2} + \frac{d^2}{2} = d^2$$

从而有

$$\| f_n - f_m \| = d \quad (n \neq m)$$

可见$\{f_n\}$不可能有收敛子列。

欧氏空间是局部列紧的，L_2空间是非局部列紧的，这也是无限维空间同有限维空间的重大差别，因此，当试图把有限维空间的性质往无限维空间推广时将会遇到本质上的困难。

习　　题

1 距离空间中任一基本列必有界。

2 证明：完备距离空间中的任何闭子集也是完备的。

3 设$\{f_n\}$是L_2中的序列，若

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \| < +\infty$$

则$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$收敛。

4 设X是距离空间，$A \subset X$。令

$$f(x) = \inf_{y \in A} \{ \rho(x, y) \}$$

证明$f(x)$是连续函数。

§4　标准正交系

在线性代数里对欧氏空间的研究，我们知道，坐标是一个有力的工具。因此，我们自然希望在L_2中也引进坐标。

在n维欧氏空间中，要引进坐标，我们是选取n个线性无关

的向量 x_1, x_2, …, x_n,然后将任意向量x都用这n个向量的线性组合来表示，即

$$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$$

其中 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$称为坐标系；$\alpha_1$, α_2, …, α_n 称为向量 x 的坐标。

若坐标系两两直交，即内积

$$(x_i, x_j)=0 \quad (i\neq j)$$

并且 $(x_i, x_i)=1$ 时，这种坐标系一般说来是最方便的，此时有

$$x=(x, x_1)x_1+(x, x_2)x_2+\cdots+(x, x_n)x_n$$

下面我们在L_2中建立相应的概念。

定义 1 两个定义在$[a, b]$上的函数 $f(x)$, $g(x)$, 如果满足

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$$

则称 $f(x)$与$g(x)$ 是正交的。

定义 2 定义在$[a, b]$上的函数 $f(x)$, 如果满足

$$\int_a^b f^2(x)dx=1$$

则称 $f(x)$ 是标准的。

定义 3 对于定义在$[a, b]$上的函数系

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \cdots, \quad \varphi_n(x), \quad \cdots$$

如果每一个函数都是标准的，任何两个都是正交的，则称此函数系是一标准正交系。

换句话说，如果 $\{\varphi_k(x)\}$ 满足条件

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

则称$\{\varphi_k(x)\}$是一标准正交系。显然，标准正交系中任一函数都属于L_2。

例 1 三角函数系

$$T:\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \cdots$$

$$T_c:\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \cdots$$

$$T_s:\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \cdots$$

看作$[-\pi,\ \pi]$上定义时，它们都是$L_2[-\pi,\ \pi]$中标准正交系。

设L_2中的某函数$f(x)$是标准正交系$\{\varphi_k\}$中的函数的一个线性组合，即

$$f(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)$$

则于两端乘以$\varphi_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，然后积分，便得

$$c_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx$$

所以系数c_1，c_2，$\cdots$，c_n是唯一确定的。特别的，当

$$f(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

时，则有

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$$

对于三角函数系，这些公式是由傅立叶发现的，因此有如下一般定义。

定义 4 设 $\{\varphi_k(x)\}$是一标准正交系，$f(x)$是L_2中之一函数，称数

$$c_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$$

为 $f(x)$关于 $\{\varphi_k(x)\}$ 的**傅立叶系数**。

级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$$

称为 $f(x)$关于$\{\varphi_k(x)\}$的傅立叶级数。

现在我们来讨论，在L_2中，函数 $f(x)$ 与其傅立叶级数的部分和之间的接近程度问题。也就是说，设

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)$$

要估计 $\|f-S_n\|$。

为上述目的，我们首先计算两个积分，

$$\int_a^b f(x)S_n(x)dx,\qquad \int_a^b S_n^2(x)dx$$

事实上，由傅立叶系数定义，知

$$\int_a^b f(x)S_n(x)dx=\sum_{k=1}^{n}c_k\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx=\sum_{k=1}^{n}c_k^2$$

类似地，由标准正交系定义，有

$$\int_a^b S_n^2(x)dx=\sum_{i,k=1}^{n}c_ic_k\int_a^b\varphi_i(x)\varphi_k(x)dx=\sum_{k=1}^{n}c_k^2$$

因此

$$\|f-S_n\|^2=\int_a^b(f-S_n)^2dx=\int_a^b(f^2-2fS_n+S_n^2)dx$$

$$=\int_a^b f^2dx-\sum_{k=1}^{n}c_k^2$$

或是

$$\|f-S_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}c_k^2 \qquad (1)$$

由于等式（1）的左端是非负的，因此有贝塞尔（Bessel）不等式

$$\sum_{k=1}^{n}c_k^2\leqslant\|f\|^2$$

由于此处n是任意的，故贝塞尔不等式可加强为

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\leqslant\|f\|^2$$

于是我们得到关于L_2空间的一个重要不等式定理。

定理1（贝塞尔不等式）　设

(i)$\{\varphi_k(x)\}$是L_2中标准正交系；

(ii)$f\in L_2$，$c_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$。

则

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\leqslant\|f\|^2 \qquad (2)$$

定义5　设$\{\varphi_k(x)\}$是L_2中标准正交系，$f\in L_2$，$\{c_k\}$是f关于$\{\varphi_k(x)\}$的傅立叶系数，即 $c_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$，如果等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\|f\|^2 \qquad (3)$$

成立，则称此等式为 f 关于 $\{\varphi_k(x)\}$ 的封闭公式。有时也称它为巴塞瓦尔（Parseval）等式。

应用等式（1），封闭公式可改写为

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n\|=0 \tag{4}$$

封闭公式的意义在于：如果 $f(x)$ 关于标准正交系 $\{\varphi_k(x)\}$ 的封闭公式成立，则 $f(x)$ 关于 $\{\varphi_k(x)\}$ 的傅立叶级数的部分和 $S_n(x)$ 收敛（按 L_2 中的平均收敛）于 $f(x)$。

定义 6　设 $\{\varphi_k(x)\}$ 是标准正交系，如果它对 L_2 中任一函数都使封闭公式成立，则称 $\{\varphi_k(x)\}$ 是封闭的。

定理 2　若 $\{\varphi_k(x)\}$ 是封闭的，则对 L_2 中任二函数 $f(x)$，$g(x)$ 恒有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$$

其中

$$a_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx,\quad b_k=\int_a^b g(x)\varphi_k(x)dx$$

证明　函数 $f(x)+g(x)$ 的傅立叶系数显然是 $\{a_k+b_k\}$，于是由 $\{\varphi_k(x)\}$ 的封闭性，有

$$\|f+g\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^2$$

即

$$\int_a^b f^2dx+2\int_a^b fgdx+\int_a^b g^2dx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+2\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k+\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2$$

注意到

$$\int_a^b f^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \quad \int_a^b g^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

于是有

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

在欧氏空间R^n中，引入坐标后，一个点可看作 n 个实数组成的有序数组；反之，任一由 n 个数组成的有序数组也必是R^n中一个点。但在L_2空间中却与此略有不同。因为，如果

$$\{c_1, c_2, \cdots, c_k, \cdots\}$$

是L_2中某一函数关于标准正交系$\{\varphi_k(x)\}$的坐标（即傅立叶系数），则由贝塞尔不等式，知

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2$$

可见$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$必是收敛的。换言之，数列$\{c_k\}$是某一 $f \in L_2$ 的坐标的必要条件是$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$。

然而，上述条件是否也是充分的呢？即若$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$，是否必有 $f \in L_2$，使$\{c_k\}$恰是 f 的坐标呢？下面的黎斯—费希尔(Riesz-Fisher)定理给出了肯定的回答。

定理 3 （黎斯—费希尔）　设 $\{\varphi_k(x)\}$是 $[a, b]$ 上一个标准正交系，如果数列 $c_1, c_2, \cdots, c_k, \cdots$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$$

则存在函数 $f(x)\in L_2$，合于

(i) $\{c_k\}$ 是 $f(x)$ 的傅立叶系数；

(ii) $f(x)$ 满足封闭公式：$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2=\|f\|^2$。并且满足条件

(i)、(ii)的函数 $f(x)$ 是唯一的。

证明 1° 令

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$$

今证序列 S_1，S_2，…，S_n，…是基本列。

事实上，设 $m>n$，则有

$$\|S_m-S_n\|^2=\int_a^b\left[\sum_{k=n+1}^{m} c_k\varphi_k(x)\right]^2 dx$$

$$=\sum_{i,k} c_i c_k\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx=\sum_{k=n+1}^{m} c_k^2$$

对任意 $\varepsilon>0$，由于 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2<+\infty$，所以有 N，使当 $m>n\geqslant N$

时，有

$$\sum_{k=n+1}^{m} c_k^2<\varepsilon^2$$

于是有

$$\|S_m-S_n\|<\varepsilon$$

此即说明 $\{S_n\}$ 是基本列。

因 L_2 空间是完备的，故必存在函数 $f(x)\in L_2$，使

$$\|S_n-f\|\to 0\quad(n\to\infty)\tag{*}$$

2° 往证上述 $f(x)$ 合于定理要求。

(i) $\{c_k\}$是 $f(x)$的傅立叶系数。

事实上，由§2定理 5 知$\{S_n(x)\}$弱收敛于 $f(x)$，即对任意 $g(x)\in L_2$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

特别地，令 $g(x)=\varphi_k(x)$，因$\{\varphi_k(x)\}$ 是标准正交系，故当 $n\geqslant k$时有

$$\int_a^b S_n(x)\varphi_k(x)dx=\int_a^b\left[\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x)\right]\varphi_k(x)dx=c_k$$

从而

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)=c_k$$

(ii) 封闭公式成立，即有 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\|f\|^2$.

因为 $S_n(x)$是 $f(x)$ 的傅立叶级数的部分和，且由1°中的式(*)，

$$\|S_n-f\|\to 0\quad(n\to\infty)$$

于是，由前面等式（1），有

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\|f\|^2$$

3° 证明满足上述条件的函数 $f(x)$是唯一的。

事实上，如果函数 $f(x)$，$g(x)$都满足条件(i)与(ii)，则由(i)知 $f(x)$与 $g(x)$有相同的傅立叶系数，再由(ii)便得

$$S_n\to f,\quad S_n\to g\quad(n\to\infty)$$

于是由§2定理 1（极限的唯一性）知 $f=g$。

综上定理证毕.

值得讨论的是，若将上述定理中的要求(ii) 去掉，只要求

合于(i)的函数是否还是唯一的？为了回答这一问题，我们先给出下述概念。

定义 7 设 $\{\varphi_k(x)\}$是L_2中的标准正交系，如果L_2中除零函数外，没有函数与所有的$\varphi_k(x)$正交，则称 $\{\varphi_k(x)\}$是完全的。

换句话说，标准正交系$\{\varphi_k\}$是完全的是指：若 $(f, \varphi_k)=0$ $(k=1, 2, \cdots)$，则 $f=0$。

定理 4 满足定理 3（黎斯—费希尔）要求（i）的函数为唯一的充要条件是，原来的标准正交系是完全的。

证明 充分性 已知 $\{\varphi_k(x)\}$是完全的。设 $f(x)$与 $g(x)$皆合于要求(i)，从而 $f(x)$与 $g(x)$ 有相同的傅立叶系数，即

$$c_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx=\int_a^b g(x)\varphi_k(x)dx \quad (k=1,2,\cdots)$$

于是

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\varphi_k(x)dx=0 \quad (k=1,2,\cdots)$$

即 $f(x)-g(x)$与所有的$\varphi_k(x)$都正交，但$\{\varphi_k(x)\}$是完全的，所以 $f(x)-g(x)$ 必是零函数，从而 $f(x)=g(x)$。证得合于要求(i)的函数是唯一的。

必要性 我们用反证法证之。如果$\{\varphi_k(x)\}$不是完全的，即存在非零函数$h(x)$，使得$h(x)$与每个 $\varphi_k(x)$ 皆正交。于是，如果 $f(x)$合于要求(i)，即有

$$c_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx \quad (k=1,2,\cdots)$$

从而由$h(x)$的性质，也必有

$$\int_a^b [f(x)+h(x)]\varphi_k(x)dx$$
$$=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx+\int_a^b h(x)\varphi_k(x)dx$$

$$=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx=c_k$$

即函数 $f(x)+h(x)$ 也合于要求(i)。但由于 $h(x)$ 是非零函数，所以 $f(x)\neq f(x)+h(x)$。这与唯一性矛盾，必要性得证。

实际上，我们可以证明标准正交系的封闭性与完全性是一致的，即有下述定理。

定理 5 标准正交系 $\{\varphi_k(x)\}$ 为完全的充要条件是，$\{\varphi_k(x)\}$ 是封闭的。

证明 充分性 已知 $\{\varphi_k(x)\}$ 是封闭的，往证与每个 $\varphi_k(x)$ 都正交的函数是零函数。

事实上，如果 $f(x)\in L_2$，且 $f(x)$ 与每个 $\varphi_k(x)$ 都正交，则 $f(x)$ 的傅立叶系数恒为

$$c_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx=0\quad(k=1,2,\cdots)$$

又由 $\{\varphi_k(x)\}$ 的封闭性，有

$$\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=0$$

即

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=\|f\|^2=0$$

从而 $f(x)$ 是零函数，得证 $\{\varphi_k(x)\}$ 是完全的。

必要性 已知 $\{\varphi_k(x)\}$ 是完全的，往证对任意 $f(x)\in L_2$，恒有 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\|f\|^2$，其中 $\{c_k\}$ 是 $f(x)$ 关于 $\{\varphi_k(x)\}$ 的傅立叶系数。

假如结论不成立，即有 $g(x)\in L_2$ 不满足封闭公式，于是由定理 1（贝塞尔不等式），必有

$$\sum_{k=1}^{\infty}c^2_k<\|g\|^2 \qquad (1)$$

其中

$$c_k=\int_a^b g(x)\varphi_k(x)dx \qquad (2)$$

是$g(x)$傅立叶系数。

由式（1）知$\{c_k\}$合于定理3（黎斯—费希尔）条件，故由该定理知，存在函数$f(x)\in L_2$，使

$$c_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx，\text{且}\ \|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2 \qquad (3)$$

结合式（2）与（3），得

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\varphi_k(x)dx=0 \quad (k=1,2,\cdots)$$

即$f(x)-g(x)$与每个$\varphi_k(x)$都正交，但$\{\varphi_k(x)\}$是完全的，故$f(x)-g(x)$是零函数，从而有$f(x)=g(x)$。但这与

$$\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}C_k^2<\|g\|^2$$

相矛盾，定理证毕。

在研究欧氏空间时，维数是由最大线性无关向量组中所含向量的数目来决定的，也就是由最大的标准正交系中所含元素的个数决定的。现在，我们自然也会要问：L_2空间的维数是什么呢？首先，我们来说明L_2空间绝对不会是有限维的。这只须证明不存在只含有限多个元素的标准正交完全系即可，因为一个函数系$\{\varphi_k(x)\}$如果不是完全的，则它一定不能是“最大”的。

事实上，如果 $\{\varphi_k(x)\}$ 不完全，就必有非零的函数$f(x)\in L_2$，使

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = 0 \quad (k=1,2,\cdots)$$

令 $\varphi_0(x) = \dfrac{f(x)}{\|f(x)\|}$，则有

$$\|\varphi_0\|^2 = \int_a^b \varphi_0^2(x)dx = \frac{1}{\|f\|^2}\int_a^b f^2(x)dx = 1$$

且有

$$\int_a^b \varphi_0(x)\varphi_k(x)dx = \frac{1}{\|f\|}\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = 0 (k=1,2,\cdots)$$

即 $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots\}$是一"更大"的标准正交系.

定理 6 任何完全的标准正交系$\{\varphi_k(x)\}$中都包含无限多个元素.

证明 假设结论不成立，即$\{\varphi_k(x)\}$中只有有限多个元素

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x)$$

于是每一 $f(x)\in L_2$都有一个由m个实数组成的数组$\{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$与之对应，此处

$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx \quad (k=1, 2, \cdots, m)$$

又因$\{\varphi_k(x)\}$是完全的，从而是封闭的，所以封闭公式成立，即有

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{m} c_k^2 \tag{1}$$

如果我们把$\{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$看作$m$维欧氏空间$R^m$中的一个点，基于上述讨论，实际上我们作出了一个从$L_2$到$R^m$的映射.

$$\Phi: L_2 \to R^m, f \longmapsto \Phi(f) = \{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$$

今证Φ是双射.

事实上，对任意数组$\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，由定理 3（黎斯—

费希尔）知，必存在唯一的$g(x)\in L_2$，使得

$$a_k=\int_a^b g(x)\varphi_k(x)dx \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

且有

$$\|g\|^2=\sum_{k=1}^{m}a^2_k$$

这说明Φ即是满射又是单射，从而是双射。

另一方面，可以看出两个空间L_2与 R^m 具有相同的距离公式。

实际上，对任意 $f(x)$，$g(x)\in L_2$，设

$\Phi(f)=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m\}$，$\Phi(g)=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m\}$

于是由定理 2 及式（1），有

$$\begin{aligned}\|f-g\|^2&=\int_a^b|f-g|^2dx\\&=\int_a^b f^2dx-2\int_a^b fgdx+\int_a^b g^2dx\\&=\sum_{k=1}^{m}a_k^2-\sum_{k=1}^{m}2a_kb_k+\sum_{k=1}^{m}b_k^2\\&=\sum_{k=1}^{m}(a_k-b_k)^2\end{aligned}$$

即

$$\|f-g\|=\left[\sum_{k=1}^{m}(a_k-b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

由于L_2与 R^m两个空间有相同的距离公式，所以相对应的向量具有相同的长度，即这种对应不改变元素间的距离关系，从而 R^m 中的聚点，对应于L_2中也应该是聚点。特别地，我们已知 R^m 是局部列紧的（因在R^m中波尔查诺—维尔斯特拉斯定

理成立），则 L_2 也应该是局部列紧的，然而我们已经证明，L_2不具有局部列紧性，这一矛盾说明$\{\varphi_k(x)\}$中必含有无限多个元素。

综上定理证毕。

定理6告诉我们，完全标准正交系含有无限多个元素。事实上，我们还可以证明，L_2中的任何完全标准正交系都恰有可列多个元素。

定理7 L_2空间中的任何标准正交系E，都不能含有多于可列个的元素。

证明 由定理6知E不可能是有限集，故只须证明E是可列集。

事实上，由§3定理4知L_2空间是可分的，因而L_2中有可列稠密子集D。于是对任意$f\in E$及$\frac{\sqrt{2}}{4}>0$，应有某个$f^*\in D$，使得

$$\|f-f^*\|<\frac{\sqrt{2}}{4}$$

如此便得到从E到D的一个映射

$$\Phi.E\longrightarrow D,\ f\longmapsto\Phi(f)=f^*$$

令$\Phi[E]=D^*$。显然$D^*\subseteq D$且Φ是从E到D^*的满射，今证Φ是单射，为此只须证明，若f，$g\in E$且$f\neq g$，则$f^*\neq g^*$。

因为E是标准正交系，故对f，$g\in E$且$f\neq g$时，恒有

$$\int_a^b fg\,dx=0,\quad \int_a^b f^2dx=\int_a^b g^2dx=1$$

于是有

$$\|f-g\|^2=\int_a^b(f-g)^2\,dx=\int_a^b f^2dx-2\int_a^b fg\,dx+\int_a^b g^2\,dx$$

$$=\int_a^b f^2dx+\int_a^b g^2dx=2$$

从而有

$$\sqrt{2}=\|f-g\|\leqslant\|f-f^*\|+\|f^*-g^*\|+\|g^*-g\|$$
$$<\frac{\sqrt{2}}{4}+\|f^*-g^*\|+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

所以有

$$\|f^*-g^*\|>\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$$

即

$$f^*\neq g^*$$

于是证得$E\sim D^*$，而D^*是可列集的子集，又E不为有限集，故E是可列集。

定理6和定理7表明，L_2空间是可列无限维的。

习　　题

1．证明三角系统

$$T:\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \cdots$$

在$L_2[-\pi,\pi]$中是标准正交的。

2．设$\{\varphi_k\}$是L_2中标准正交系，则$\{\varphi_k\}$中任意有限多个元素都是线性无关的。

3．设$\{\varphi_k\}$是L_2中一封闭标准正交系，$f\in L_2$．则对任一可测集$E\subset[a,b]$，$f(x)$关于$\{\varphi_k\}$的傅立叶级数在E上可逐项积分，即

$$\int_E f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_E\varphi_k(x)dx$$

其中c_k为$f(x)$的傅立叶系数。

4. 在L_2中，$(f, g)=0$的充要条件是对任意实数α，有

$$\|f+\alpha g\| = \|f-\alpha g\|$$

5. 设 $\{e_k\}$是L_2中一标准正交系，$\{\alpha_k\}$ 是一族常数，则下述条件是等价的：

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$收敛；

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$收敛；

(iii) 存在$x\in L_2$使 $\alpha_k=(x, e_k)$。

6. 设M是L_2的一个子集，$M^\perp$ 表示与M中所有元素都正交的元素的全体组成的集合，即

$$M^\perp=\{g \mid (f, g)=0,\ 对任意\ f\in M\}$$

证明$M^\perp$是L_2的一个完备子空间。

§5 一个完全标准正交系

在前一节中，我们引进了坐标系，并且证明了标准正交系的完全性和封闭性是等价的。但迄今为止，还没有回答完全标准正交系是否确实存在的问题。实际上，我们可以证明为大家所熟悉的三角函数系就是一个完全标准正交系，下面就来讨论这一问题。

在本节中，我们总假定函数是定义在$[-\pi, \pi]$上的。

在§4例1中，我们已经提及过三角函数系

$$T:\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \cdots$$

是 $L_2[-\pi, \pi]$中的标准正交系，所以我们只须证明T还是完全的就可以了，为此，我们先证下面的斯切克洛夫(Стеклов)

定理.

定理 1 (斯切克洛夫) 设函数类A在 L_2 中是稠密的，如果标准正交系 $\{\varphi_k(x)\}$ 对于A中每个函数都使封闭公式成立，即对任意$g\in A$，都有

$$\|g\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2,\quad 其中\ c_k=\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\varphi_k(x)dx$$

则 $\{\varphi_k(x)\}$在L_2中是封闭的.

证明 设 $f(x)\in L_2, f(x)$的傅立叶级数是$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$. 令

$$S_n(f)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)$$

于是由§4定义 5 说明中的式（4）知，为证 $\{\varphi_k(x)\}$在L_2中是封闭的，只须证明$\lim\limits_{n\to\infty}\|f-S_n(f)\|=0$. 亦即证明对任意 $\varepsilon>0$, 存在N，使当 $n\geqslant N$ 时，有$\|f-S_n(f)\|<\varepsilon$.

首先，容易看出：

（1） $S_n(\lambda f)=\lambda S_n(f)$;

（2） $S_n(f_1+f_2)=S_n(f_1)+S_n(f_2)$;

（3） $\|S_n(f)\|\leqslant\|f\|$.

我们对上面三个式子给以说明如下：

（1） 因 $f(x)$的傅立叶系数是c_k，即

$$c_k=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi_k(x)dx$$

于是λf 的傅立叶系数为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\lambda f(x)\varphi_k(x)dx=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi_k(x)dx=\lambda c_k$$

从而有

$$S_n(\lambda f)=\sum_{k=1}^{n}\lambda c_k\varphi_k(x)=\lambda\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)=\lambda S_n(f)$$

（2）设 f_1，f_2 的傅立叶系数分别为 $\{\alpha_k\}$ 和 $\{\beta_k\}$，则 f_1+f_2的傅立叶系数为$\{\alpha_k+\beta_k\}$。于是有

$$\begin{aligned}S_n(f_1+f_2)&=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k+\beta_k)\varphi_k(x)\\&=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varphi_k(x)\\&=S_n(f_1)+S_n(f_2)\end{aligned}$$

（3）由于

$$\|S_n(f)\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\right]^2dx$$

$$=\sum_{i,k}c_ic_k\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_i(x)\varphi_k(x)dx=\sum_{k=1}^{n}c^2_k$$

从而由贝塞尔不等式，有

$$\|S_n(f)\|^2=\sum_{k=1}^{n}c_k^2\leqslant\|f\|^2$$

于是证得 $\|S_n(f)\|\leqslant\|f\|$。

注意到上述诸事实，对任意 $f(x)\in L_2$及 $\varepsilon>0$，因为A在L_2中稠密，故有 $g(x)\in A$，使

$$\|f-g\|<\frac{\varepsilon}{3}$$

又因

$$\begin{aligned}\|f-S_n(f)\|\leqslant\|f-g\|&+\|g-S_n(g)\|\\&+\|S_n(g)-S_n(f)\|\end{aligned}$$

且

$$\| S_n(g) - S_n(f) \| = \| S_n(g-f) \| \leqslant \| g-f \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

于是有

$$\| f - S_n(f) \| < \frac{2}{3}\varepsilon + \| g - S_n(g) \|$$

由已知条件知，对 $g(x) \in A$ 封闭公式成立，即$\lim\limits_{n\to\infty} \| g - S_n(g) \| = 0$（见 §4 定义 5 说明中式（4）），从而对上述 $\frac{\varepsilon}{3}>0$，有N，使当$n \geqslant N$时，有

$$\| g - S_n(g) \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

因此，当$n \geqslant N$时，有

$$\| f - S_n(f) \| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

由$\varepsilon>0$的任意性，便证得$\lim\limits_{n\to\infty} \| f - S_n(f) \| = 0$。

定义 1 称函数

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

为n次三角多项式。其中 A，a_k，b_k均为常数。

为了后面的需要，这里给出维尔斯特拉斯关于连续函数的三角多项式逼近定理，我们略去其证明，有兴趣的读者可参看主要参考文献〔3〕第四章§5。

定理 2（维尔斯特拉斯定理） 设 $f(x)$是一周期为2π 的连续函数，则对任意$\varepsilon>0$，必有三角多项式$T(x)$，使不等式

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

一致地成立。

定理 3 三角多项式类在 $L_2[-\pi, \pi]$ 中是稠密的。

证明 只须证明，对任一 $f \in L_2$ 及$\varepsilon>0$，必有三角多项式

T，使 $\|f-T\|<\varepsilon$.

事实上，任取 $f\in L_2$及$\varepsilon>0$，由§3定理 3 知，必有$[-\pi,\pi]$上连续函数 $\varphi(x)$，使

$$\|f-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

设 $|\varphi(x)|\leqslant k$

在$[-\pi,\pi]$上作连续函数$\psi(x)$如下：

$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{当 } x\in[-\pi+\delta,\pi]\text{时}\\ \varphi(\pi) & \text{当 } x=-\pi\text{时}\\ \varphi(x)\text{为线性函数} & \text{当 } x\in[-\pi,-\pi+\delta]\text{时}\end{cases}$$

且假定

$$0<\delta<\frac{\varepsilon^2}{64k^2}$$

则函数 $\psi(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上显然是连续的，且

$$\psi(-\pi)=\psi(\pi)$$

于是我们可以把$\psi(x)$扩展为整个实直线R^1上的周期为 2π 的连续函数.

另外，显然有 $|\psi(x)|\leqslant k$，且注意到 $|\varphi(x)|\leqslant k$，因此有

$$\|\varphi-\psi\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi-\psi)^2dx=\int_{-\pi}^{-\pi+\delta}(\varphi-\psi)^2dx$$

$$\leqslant 4k^2\delta<\frac{\varepsilon^2}{16}$$

即 $\|\varphi-\psi\|<\frac{\varepsilon}{4}$

从而有

$$\|f-\psi\|\leqslant\|f-\varphi\|+\|\varphi-\psi\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{3}{4}\varepsilon$$

因为$\psi(x)$是以2π为周期的连续函数，所以由定理 2 知，必

有三角多项式$T(x)$，使得

$$|\psi(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2\pi}},\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

于是有

$$\|\psi-T\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(\psi-T)^2dx<\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2\pi}}\right)^2dx=\frac{\varepsilon^2}{16}$$

即

$$\|\psi-T\|<\frac{\varepsilon}{4}$$

因此有

$$\|f-T\|\leqslant\|f-\psi\|+\|\psi-T\|<\frac{3}{4}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$$

综上定理证毕。

定理 4 三角函数系

$$T:\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \cdots$$

是 $L_2[-\pi,\ \pi]$中完全标准正交系。

证明 只须证三角函数系T是完全的。由于标准正交系的完全性与封闭性一致，因此只须证T是封闭的。由定理 3 知三角多项式类在 $L_2[-\pi,\ \pi]$ 中稠密，因而，如果我们能够证明三角函数系T对一切三角多项式

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

封闭公式成立，则由定理 1 即知本定理结论成立。

把三角函数系T依次表示为：

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x),\ \cdots$$

则三角多项式$T(x)$显然是T中函数的线性组合。令

$$T(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x) \qquad (*)$$

因为$\{\varphi_n(x)\}$是标准正交系，所以于(*)式两端乘以$T(x)$再积分，便得

$$\|T\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}T^2(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_{-\pi}^{\pi}T(x)\varphi_k(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2.$$

即封闭公式成立，于是定理证毕。

习　　题

设$\{\phi_k(x)\}$是一标准正交系，如果对函数系

$$1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n,\ \cdots$$

封闭公式都成立，则$\{\phi_k(x)\}$是一完全标准正交系。

第二部分　实变函数论学习指导

第一章　集合学习指导

集合的概念是十九世纪七十年代康托首先导入的．而后集合的观点和方法立即迅速渗透到数学的各个分支，从而改变了数学的面貌．对现代数学的发展起着巨大的作用．实变函数论，也是在集合论的观点与方法渗入数学分析的基础上产生的．

我们在这一章里介绍了一些集合理论，其主要目的当然是为了本课程的需要，但也将对读者学习其他近代数学理论起着部分的奠基作用．

本章所讨论的基本内容是集合的运算与集合的基数两部分，学习这些内容应注意以下几点：

1　对于集合的包含关系以及并、交、差、补等概念一定要正确理解，并掌握其实质．关于概念的学习，首先应注意概念中的条件总是充分必要的．比如A与B是二集合，若已知$x\in A$且$x\in B$则知$x\in A\cap B$；反之如已知$x\in A\cap B$，则知$x\in A$且$x\in B$．另外也还要考虑它的否定形式，如若已知$x\notin A$或$x\notin B$，则知$x\notin A\cap B$；反之若已知$x\notin A\cap B$，则知$x\notin A$或$x\notin B$．这样既从肯定形式又从否定形式两方面来考虑概念，不仅能对概念加深理解，且能在此基础上总结出论证某些问题的基本思路与方法．基于此，本书常在给出一个概念之后对其作某些说明，望读者对此多予注意，且能借此有意地培育提高学习掌握概念的方法与技能．

2　准确熟练地进行集合间的各种运算是学习本门课必备的基本技能．读者必须多作这方面的练习．特别是在论证问题时培育进行思路分析的学习方法是非常重要的，所以书中常在证明问题之前做些分析．对此读者应注意到其目的不只在于使读者更能主动自觉地去理解该具体问题的证明，尤为重要的是借此启示读者有意地自我培育起论证问题时进行思路分析的习惯，从而提高分析问题解决问题的能力．

3　对集合基数部分的学习，应注意论证两集合对等技能的训练．其方法基本可分三种：一是依对等定义直接构造两集间双射的直接证法；二是基于对等具传递性而采取间接证法．如欲证 $A\sim C$，已知 $A\sim B$，此时只须证$B\sim C$，当然这是在证$B\sim C$较之证$A\sim C$为方便时采用此法才更有价值；三是应用有关定理来断定集合的基数．

特别值得注意的是：无限集与有限集就基数角度来说，是有本质区别的，无限集在这方面的性质往往与我们的直观习惯不符，因此在处理无限集问题时，必须谨慎小心，不通过严谨的论证切不可轻下断语，只凭直观想当然是决不允许的．

补 充 例 题

例 1　设 $A_n=\left[-1+\frac{1}{n},\quad 1-\frac{1}{n}\right]$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=(-1,\ 1)$．

证明 左$\subseteq$右　显然对每个n都有$A_n\subseteq(-1,1)$，从而由§1定理3 知$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq(-1,\ 1)$．

左$\supseteq$右　设 $x\in(-1,\ 1)$，即 $-1<x<1$，从而有 k 使

$-1+\frac{1}{k}<x<1-\frac{1}{k}$，即 $x\in\left[-1+\frac{1}{k},\ 1-\frac{1}{k}\right]=A_k$，于是有

$x\in A_k\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$。

例 2 $A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in D}B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in D}(A\cup B_\alpha)$。

证法一 左$\subseteq$右 设 $p\in A\cup(\cap B_\alpha)$，即 $p\in A$ 或 $p\in\cap B_\alpha$，于是有 $p\in A$ 或 $p\in B_\alpha$ $(\alpha\in D)$，从而 $p\in A\cup B_\alpha$ $(\alpha\in D)$，故有 $p\in\bigcap_{\alpha\in D}(A\cup B_\alpha)$。

左$\supseteq$右 设 $p\in\bigcap_{\alpha\in D}(A\cup B_\alpha)$，即对任意 $\alpha\in D$ 恒有 $p\in A\cup B_\alpha$，于是有 $p\in A$ 或 $p\in B_\alpha(\alpha\in D)$，从而 $p\in A$ 或 $p\in\cap B_\alpha$，即 $p\in A\cup(\cap B_\alpha)$。

证法二 左$\subseteq$右 设 $p\notin\cap(A\cup B_\alpha)$，即存在 $\alpha_0\in D$，使 $p\notin A\cup B_{\alpha_0}$。因 $A\cup B_{\alpha_0}\supseteq A\cup(\cap B_\alpha)$，从而 $p\notin A\cup(\cap B_\alpha)$。

左$\supseteq$右 设 $p\notin A\cup(\cap B_\alpha)$，即 $p\notin A$ 且 $p\notin\cap B_\alpha$，从而存在 $\alpha_0\in D$，使 $p\notin A$ 且 $p\notin B_{\alpha_0}$，即 $p\notin A\cup B_{\alpha_0}$，于是有 $p\notin\cap(A\cup B_\alpha)$。

证法三 左$\subseteq$右 显然对任意 $\alpha\in D$，恒有

$$A\cup(\cap B_\alpha)\subseteq A\cup B_\alpha.$$

于是由§1定理 3 知有 $A\cup(\cap B_\alpha)\subseteq\cap(A\cup B_\alpha)$。

左$\supseteq$右（反证法） 假设存在 $p_0\in\cap(A\cup B_\alpha)$，使 $p_0\notin A\cup(\cap B_\alpha)$。于是由证法二知必有 $p_0\notin\cap(A\cup B_\alpha)$，这与假设矛盾。

证法四 事实上，由§1的定理 4，定理 7 有

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(\cap(A\cup B_\alpha))&=\cup\mathscr{C}(A\cup B_\alpha)=\cup(\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B_\alpha)\\&=\mathscr{C}A\cap(\cup CB_\alpha)=\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}(\cap B_\alpha)=\mathscr{C}(A\cup(\cap B_\alpha))\end{aligned}$$

从而由§1定理 6 知有

$$\bigcap(A\cup B_\alpha)=A\cup(\bigcap B_\alpha)$$

例3 设 $(-\infty, \infty)$ 上函数 $f(x)$ 具有如下的特性：对于每个x_0有$\delta>0$与之对应，当 $|x-x_0|<\delta$时，$f(x)\geqslant f(x_0)$。则 $f(x)$ 的函数值全体是至多可列集。

证明 因为以有理数为端点的所有开区间组成的集 Z 是可列的，故只须证明 $f(x)$ 的函数值集Y与 Z 的一个子集对等。

1° 由题设知，对任一 $x_0\in(-\infty, \infty)$， 应有有理区间（端点为有理数的区间）$\varDelta_{x_0}=(r_{x_0}, r'_{x_0})$，使

$$x_0\in\varDelta_{x_0},\ \varDelta_{x_0}\subseteq(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$$

从而当 $x\in\varDelta_{x_0}$ 时有 $f(x)\geqslant f(x_0)$。将x_0取遍 $(-\infty, \infty)$，所对应的有理区间$\varDelta_{x_0}$组成的集，记为

$$M=\{\varDelta_{x_0}\mid x_0\in(-\infty,\ \infty)\}$$

因 $M\subseteq Z$，而 Z 是可列集，故M是至多可列集。

2° 令 $Y=\{f(x)\mid x\in(-\infty,\ \infty)\}$

即Y是 $f(x)$ 的值域，我们只须证Y是至多可列集．为此采取证Y与M的一个子集对等的方法．

显然映射 φ: $Y\longrightarrow\varphi[Y]=M^*\subseteq M$,

$$f(x)\longmapsto\varphi[f(x)]=\varDelta_x$$

是满射（注意，$x_1\neq x_2$，可能有 $f(x_1)=f(x_2)$）。

若 $f(x)\equiv d$ $(x\in(-\infty,\ \infty))$，则问题解决。

若 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则 $\varphi[f(x_1)]=\varDelta_{x_1}\in M^*$， $\varphi[f(x_2)]=\varDelta_{x_2}\in M^*$，必有 $\varDelta_{x_1}\neq\varDelta_{x_2}$。如不然，假设 $\varDelta_{x_1}=\varDelta_{x_2}$，于是由 $x_2\in\varDelta_{x_1}$ 有 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$；同理由$x_1\in\varDelta_{x_2}$而有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，从而 $f(x_1)=f(x_2)$，与假设 $f(x_1)\neq f(x_2)$ 矛盾，故必有 $\varDelta_{x_1}\neq\varDelta_{x_2}$，即$\varphi$是单射．

综上得证 $Y\sim\varphi[Y]=M^*\subseteq M$，故$Y$是至多可列集．

例4 §3定理7 的证明。

证明 只须证A与自然数集N的一子集对等．为此只须构造一个

双射 φ：$A\longrightarrow M\subseteq N$，$a\longmapsto\varphi(a)=m$

1° 设 $a_{n_1,n_2,\cdots,n_k}\in A$（$n_i$是自然数，$i=1,2,\cdots,k$）。令自然数

$$m=10^{n_1+n_2+\cdots+n_k}+10^{n_2+n_3+\cdots+n_k}+10^{n_3+\cdots+n_k}+\cdots+10^{n_k}\qquad(1)$$

与$a_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$对应。

我们将A中每个元素a，都令按上述方法得到的自然数m与之对应，则全体这样的m组成的集合是N的子集，记其为M。于是我们给出映射

$$\varphi:\ A\longrightarrow M,\quad a\longmapsto\varphi(a)=m$$

由M的作法显然φ是满射．

下面证φ是单射，为此，设

$$a=a_{n_1,n_2,\cdots,n_k},\quad a'=a_{n_1',n_2',\cdots,n_l'}\in A$$

$\varphi(a)=m$，$\varphi(a')=m'$，只须证若 $a\neq a'$，则 $m\neq m'$。

事实上，若 $a\neq a'$，则$k\neq l$或$k=l$而至少有一i_0使$n_{i_0}\neq n'_{i_0}$。

把m写开来（依式(1)）应该是

$$10\cdots010\cdots010\cdots010\cdots0$$

的形式．其中1的个数恰好是k。所以若$m=m'$则首先有$k=l$，且因为在m和m'中第一个（从右到左）出现1的位置应该相同，从而有 $n_k+1=n'_l+1$，即 $n_k=n'_l$。再考虑第二个1的位置又得

$$n_{k-1}+n_k+1=n'_{l-1}+n'_l+1$$

因已知 $n_k=n_l'$，故有 $n_{k-1}=n'_{l-1}$。依此类推，最后便有 $n_1'=n_1$，$n'_2=n_2$，$n'_3=n_3$，$\cdots$，$n'_l=n_k$。这与$a\neq a'$矛盾．故当 $a\neq a'$时，必有 $\varphi(a)=m\neq m'=\varphi(a')$。得证$\varphi$是单射．

综上证得 $\varphi: A \longrightarrow M$是双射，故 $A \sim M$。

2° 因$M \subseteq N$，故M至多可列，又由1°知$A \sim M$，故A是有限集或可列集。

例 5 设E是n元素集，M为E的所有子集组成的族，则

$$\bar{\bar{E}} = n, \bar{\bar{M}} = 2^n.$$

证明 因M含有一个空集ϕ，C_n^1个单元素集，C_n^2个二元素集，…，C_n^n个n元素集，故M的元素个数为

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

上述结果对$n = 0$或1时也成立。当$n = 0$时表示E是空集，故M只含一个元素ϕ。当$n = 1$时，$E = \{a\}$，此时M恰有两个元素，即ϕ及$\{a\}$。

例 6 设 $A_1 \cap A_2 = \phi$，$B_1 \cap B_2 = \phi$，且

$$\varphi_1: A_1 \longrightarrow B_1, \quad \varphi_2: A_2 \longrightarrow B_2$$

皆是双射，则我们由§4引理1知必存在双射

$$\varphi: A_1 \cup A_2 \longrightarrow B_1 \cup B_2$$

但当$A_1 \subseteq A_2$，$B_1 \subseteq B_2$时，φ_1、φ_2意义同前，是否必存在$A_2 - A_1$到$B_2 - B_1$的双射？

解 若 $A_1 \subseteq A_2$，$B_1 \subseteq B_2$，则$A_2 - A_1$与$B_2 - B_1$之间未必存在双射。例如：

$$A_1 = \{2, 3, \cdots\}, \quad B_1 = \{3, 4, \cdots\},$$

$$A_2 = B_2 = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

$$\varphi_1: A_1 \longrightarrow B_1, \quad n \longmapsto \varphi_1(n) = n + 1,$$

$$\varphi_2: A_2 \longrightarrow B_2, \quad n \longmapsto \varphi_2(n) = n.$$

显然φ_1及φ_2皆是双射。但

$$A_2 - A_1 = \{1\}, \quad B_2 - B = \{1, 2\}$$

故$A_2 - A_1$与$B_2 - B_1$之间不存在任何双射。

第二章　点集学习指导

本章讨论的点集理论，不仅是以后学习测度理论和新积分理论的基础，也为一般的抽象空间的研究提供了具体的模型．学习本章内容应注意以下几点：

1　本章内容较难掌握，主要是由于基本概念较多，且有些概念（如内点、聚点、边界点等）相互联系，形式上也常有类似之处，因而容易混淆．学习这些概念时务须细心谨慎，要准确牢固地掌握每一个概念的实质，学习时可与类似概念对照着进行，以利于判别概念间的异同点．

尤应注意的是书中对某些概念（如聚点），给出了多种等价（充要）条件，这将有利于理解概念本质，特别是在讨论某些问题时，如能恰当地选用某种条件，常常会给问题的解决带来方便，所以对等价条件必须深刻理解，运用熟练灵活．

2　本章定理亦较多，对定理的学习，起码要弄清弄懂下述三点：①定理的已知条件和要证的结论；②定理证明的方法和推理过程；③定理的意义和作用．还应特加注意论证思路和方法，这样才能逐步提高分析解决数学问题的基本能力．

同是定理，显然它们的意义和作用也会不尽相同．本章中§3的定理1—4都十分重要，在今后的学习中常有应用．定理3（紧致性定理），定理7（隔离性定理）分别刻划了 R^n 空间的两个重要性质，前者与连续函数的性质紧密相关，这是我们熟知的数学分析中有限覆盖定理的推广；我们已知 R^n 中单

点集是闭集，故定理7的特殊情形是 R^n 中不同两点能够用两个不相交的开集分离，该性质决定了 R^n 中收敛点列极限唯一这一事实。另外定理7的条件尚可减弱，参见补充例题中的例4。对定理条件的探讨是学习定理的进一步要求，如能经常注意定理条件的讨论，会逐步培养自己学习过程中的创造能力，是大有益处的。

对定理间的地位关系也应注意，有些定理自身并非具有独立的重要性，它们往往只是为某一重要定理作准备（这样的定理也常称作引理），如§3定理5与定理6就是为定理7作准备的；§4的定理1与定理2是为定理3作准备的，而定理4则是为定理5作准备的。学习时应注意每个定理所处的地位与它们之间的相互联系，这样既可使学习的内容系统化，从而便于理解和掌握重点，也可避免模糊一片、食而不化的现象。

3 本章内容还应提出的一点是康托集的例子。切记务必不要"小看"这个例子。此例在许多问题的讨论中，起着很大的作用，因为它有着许多"奇怪"的性质是直观想象所难以理解的。由此也可看出在推理过程中，切忌直观想象地轻率地作出结论，这样很容易导致错误。

补 充 例 题

例 1 设 $E\subseteq R^n$，则 $p\in \bar{E}$ 的充要条件为 p 的每个邻域必与 E 相交。

证明 必要性 由已知，$p\in \bar{E}=E\cup E'$，故 $p\in E$ 或 $p\in E'$。若 $p\in E$，则显然 p 的任一邻域必都与 E 相交；若 $p\in E'$，则由聚点的定义知，p 的任意邻域必与 E 相交。

充分性 已知 p 的任一邻域与 E 相交，故对任一自然数 n，

取 $\delta_n=\frac{1}{n}$，则 $E\cap N(p,\ \delta_n)\neq\phi$，今取 $p_n\in E\cap N(p,\ \delta_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，从而得到 E 中点列 $\{p_n\}$，显然 $p_n\to p$ $(n\to\infty)$.

若 $\{p_n\}$ 是互异点列，则由§1定理3知，$p\in E'$；若 $\{p_n\}$ 不是互异点列，显然有 $p\in\{p_n\}\subseteq E$。综上可知 $p\in E\cup E'=\bar{E}$.

例 2　设 $f(x)$ 是 R^1 上的实值连续函数，则对任意常数 a，$\{x\mid f(x)>a\}$ 总是开集，而 $\{x\mid f(x)\geqslant a\}$ 总是闭集.

证明　1° 往证 $\{x\mid f(x)>a\}$ 是开集. 设 $x_0\in\{x\mid f(x)>a\}$，则 $f(x_0)>a$，由 $f(x)$ 的连续性知，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$，即 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 时，有 $f(x)>a$，从而有

$$N(x_0,\ \delta)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subseteq\{x\mid f(x)>a\}$$

故 x_0 是 $\{x\mid f(x)>a\}$ 的内点。由 x_0 的任意性得证 $\{x\mid f(x)>a\}$ 是开集.

2°　往证 $\{x\mid f(x)\geqslant a\}$ 是闭集.

设 x_0 是 $\{x\mid f(x)\geqslant a\}$ 的聚点，由 §1 定理3 知，$\{x\mid f(x)\geqslant a\}$ 中有互异点列 $\{x_n\}$ 使

$$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$$

显然有

$$f(x_n)\geqslant a\ (n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{1}$$

因 $f(x)$ 连续，故当 $x_n\to x_0$ 时，有 $f(x_n)\to f(x_0)$，于是由式(1)有 $f(x_0)\geqslant a$，从而 $x_0\in\{x\mid f(x)\geqslant a\}$，得证 $\{x\mid f(x)\geqslant a\}$ 是闭集.

例 3　任意邻域 $N(p,\ \delta)$ 恒为开集，且 $N(p,\ \delta)$ 的闭包

$$\overline{N(p,\ \delta)}=\{p'\mid \rho(p',\ p)\leqslant\delta\}$$

证明　由§2例4可知 $N(p,\ \delta)$ 是开集；今证

$$\overline{N(p,\ \delta)}=\{p'\mid \rho(p',\ p)\leqslant\delta\}$$

左$\subseteq$右　设 $p_0\in\overline{N(p,\ \delta)}=N(p,\ \delta)\cup[N(p,\ \delta)]'$，则

$p_0\in N(p,\ \delta)$ 或 $p_0\in[N(p,\ \delta)]'$.

若 $p_0\in N(p,\delta)$，则 $\rho(p_0,p)<\delta$，故 $p_0\in\{p'\mid\rho(p',p)\leqslant\delta\}$；

若 $p_0\in[N(p,\ \delta)]'$，即 p_0是 $N(p,\delta)$的聚点，从而 $N(p,\ \delta)$ 中有互异点列$\{p_n\}$使 $p_n\to p_0(n\to\infty)$.

因对每个n，恒有

$$\rho(p_n,\ p)<\delta$$

于是由距离的连续性，对上述不等式两端取极限$(n\to\infty)$，则得 $\rho(p_0,\ p)\leqslant\delta$，即 $p_0\in\{p'\mid\rho(p',\ p)\leqslant\delta\}$.

左$\supseteq$右 设 $p_0\in\{p'\mid\rho(p',\ p)\leqslant\delta\}$，则 $\rho(p_0,\ p)\leqslant\delta$，即 $\rho(p_0,\ p)<\delta$ 或 $\rho(p_0,\ p)=\delta$.

若 $\rho(p_0,\ p)<\delta$，则 $p_0\in N(p,\ \delta)\subseteq\overline{N(p,\ \delta)}$；

若 $\rho(p_0,\ p)=\delta$，显然 $p_0\in[N(p,\ \delta)]'\subseteq\overline{N(p,\ \delta)}$.

总之必有 $p_0\in\overline{N(p,\ \delta)}$.

例 4 设 F_1，F_2 是R^n中闭集，且 $F_1\cap F_2=\phi$，则存在开集G_1，G_2，使

$$F_1\subseteq G_1,\ F_2\subseteq G_2,\ 且\ G_1\cap G_2=\phi$$

证明 分下面三步进行证明：

1° 对任意 $p\in F_1$，有 $\rho(p,\ F_2)>0$. 事实上，假若有 $p^0\in F_1$，使 $\rho(p_0,\ F_2)=0$，显然 p_0 必是F_2的聚点，因F_2是闭集，从而 $p_0\in F_2$，这与 $F_1\cap F_2=\phi$矛盾. 同理，对任意 $q\in F_2$，则有 $\rho(q,\ F_1)>0$.

2° 对每个 $p\in F_1$，以 $\delta_1=\dfrac{1}{2}\rho(p,\ F_2)$ 为半径做点 p 的邻域 $N(p,\ \delta_1)$. 令 $G_1=\bigcup\limits_{p\in F_1}N(p,\ \delta_1)$，显然，$G_1$ 是开集且 $G_1\supseteq F_1$；同理，对每个 $q\in F_2$，以$\delta_2=\dfrac{1}{2}\rho(q,\ F_1)$为半径，做点

q 的邻域 $N(q,\delta_2)$，令$G_2=\bigcup_{q\in F_2} N(q,\delta_2)$，则 G_2 是开集且 $G_2\supseteq F_2$。

3° 往证 $G_1\cap G_2=\phi$。假设$G_1\cap G_2\neq\phi$，则存在 $p_0\in G_1$ 且 $p_0\in G_2$，由G_1与G_2的作法知，必有 $p\in F_1$，$q\in F_2$，使 $p_0\in N(p,\delta_1)$，且 $p_0\in N(q,\delta_2)$。于是由邻域的定义知有

$$\rho(p_0,p)<\delta_1=\frac{1}{2}\rho(p,F_2),\quad \rho(p_0,q)<\delta_2=\frac{1}{2}\rho(q,F_1)$$

从而有

$$\rho(p,q)\leqslant\rho(p,p_0)+\rho(p_0,q)<\frac{1}{2}[\rho(p,F_2)+\rho(q,F_1)] \quad (1)$$

注意到

$$\rho(p,F_2)\leqslant\rho(p,q),\quad \rho(q,F_1)\leqslant\rho(q,p)$$

故有

$$\rho(p,q)\geqslant\frac{1}{2}[\rho(p,F_2)+\rho(q,F_1)] \quad (2)$$

式（1）与式（2）矛盾，因此必有 $G_1\cap G_2=\phi$。

此例表明隔离性定理的条件可减弱，即可推广于无界的情形。

例 5 设 A,B 为非空不交闭集（不一定有界），试作在实直线R^1上连续函数 $f(x)$满足：$0\leqslant f(x)\leqslant 1$且当$x\in A$时 $f(x)=0$；当$x\in B$时，$f(x)=1$。

解 记 $\rho(x,A)$为点x到集A的距离，则$\rho(x,A)\geqslant 0$且等号当且仅当$x\in A$成立。作函数

$$f(x)=\frac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)}\quad x\in(-\infty,\infty)$$

1° 往证 $\rho(x,A)+\rho(x,B)>0$，从而 $f(x)$ 有意义。实际上，若不然有 $\rho(x,A)+\rho(x,B)=0$，所以 $\rho(x,A)=$

$\rho(x, B)=0$，又由A，B 为闭集可知 $x\in A\cap B$ 。这与假设$A\cap B=\phi$相矛盾。

2° 往证 $\rho(x, A)$是x的连续函数。实际上，对任意x_0有$\rho(x_0, A)\leqslant|x_0-x|+\rho(x, A)$及 $\rho(x, A)\leqslant|x-x_0|+\rho(x_0, A)$；所以

$$|\rho(x, A)-\rho(x_0, A)|\leqslant|x-x_0|$$

这就表明 $\rho(x, A)$为x的连续函数。

3° 由上可知 $f(x)$的分母 $\rho(x, A)+\rho(x, B)$ 为非零连续函数，从而 $f(x)$为x的连续函数。$f(x)$满足所要求的性质是显然的。因为当 $x\in A$ 时，$\rho(x, A)=0$，故 $f(x)=0$；而当$x\in B$ 时，$\rho(x, B)=0$，故 $f(x)=1$。

例 6 试在〔0,1〕上定义一个函数，它在任一有理点不连续，但在任一无理点连续。

解 由于〔0,1〕上全体有理数可列，故可记为 $Q=\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$。设 $\sum_{n=1}^{\infty}C_n$为一收敛正项级数。

对任意 $x\in[0, 1]$，定义函数

$$f(x)=\sum_{r_n<x}C_n$$

其中和式是对 $r_n<x$的那些n求C_n的和。则 $f(x)$ 为〔0,1〕上单调增函数且在无理点连续，有理点不连续，且其跃度为 $f(r^+_{n_0})-f(r^-_{n_0})=C_{n_0}$。

事实上，由于对任意 $y>x$，

$$f(y)-f(x)=\sum_{x\leqslant r_n<y}C_n\geqslant 0$$

所以 $f(x)$为增函数。

令 $E_{xy}=\{r_n \mid x\leqslant r_n<y\}$，当$x$为无理数时，$\lim\limits_{y\to x+} E_{xy}=\phi$，所以 $f(x+0)=f(x)$，同样可证 $f(x-0)=f(x)$，所以 $f(x)$在无理点连续。

当x为有理点r_{n_0}时，有$\lim\limits_{y\to x+}E_{xy}=\{r_{n_0}\}$，所以 $f(x+0)-f(x)=C_{n_0}$，且此时类似亦可证 $f(x-0)=f(x)$ $(x=r_{n_0})$，从而

$$f(r_{n_0}^+)-f(r_{n_0}^-)=C_{n_0}>0$$

故 $f(x)$在有理点不连续。

综上得证 $f(x)$ 即为所求

第三章　勒贝格测度学习指导

本章主要是讨论 R^n 中点集的测度．它是建立新积分理论的基础，学习本章内容应注意以下几点。

1　对 R^n 中一般点集的可测性及测度的定义是通过下述步骤完成的．第一，简要介绍了 R^1 中的有界点集的测度概念的形成，给读者以具体的实感．第二，给出了 R^n 中一般点集的外测度和内测度的概念．第三，对 R^n 中的有界点集 E，只要 $m^*E=m_*E$，就称 E 是可测的，其值称为 E 的测度。第四，R^n 中任意点集的可测性及测度是通过把它分解为有界可测集来完成的．同时也直接给出了一般点集可测的定义，如§2定理1．在本章的一些概念中外测度和可测集两概念尤为重要。特别是对可测集的各种充要条件（等价形式），读者一定要熟练的掌握，以便灵活的运用。

2　外测度的基本性质与可测集的运算性质的讨论也是本章的主要内容。在可测集的运算性质中尤以完全可加性（§3定理8）和单调可测集列的极限集的测度与测度的极限的结果（§3定理10和11）更为重要，它们在以后的学习中将起着重要的作用。

另外，要注意，对于测度大于零的可测集必存在不可测的真子集，所以两个可测集的并集虽然可测，但其逆不真。即当把一个可测集随便分解为两个子集的并时，这样的子集未必都可测。

还要注意，有界可测集的测度必有限，但测度有限的可测集未必有界的事实。特别是在作两个集的外测度（或测度）的差运算时，要注意必须要求至少有一个集的外测度（或测度）有限时运算才有意义。

3　关于可测集族与可测集的构造是本章的又一重要内容。通过一系列的讨论得到：勒贝格可测集族为波雷尔集和测度为零的集的全体所构成的集族。在这个集族中的任何两个集的并集仍然属于该集族，所以通常称它为"可加"集族。§3定理5、6、8、9及推论5刻划了可测集的构造，读者应深入体会之。

4　在基本技能和论证方法方面，首先要熟练的掌握利用可测集的定义与等价条件判别一个集合是可测的方法；其次要善于运用可测集的一些性质去证明问题。由于任意集的外测度和可测集的测度都是一个非负的实数（有时会出现$+\infty$），所以本章许多问题的讨论和定理的证明最终都归结为往证两个实数的相等。这是值得注意的方法。

5　乘积空间的测度是比较复杂且难于掌握的问题。本节的一些内容主要是为后面的应用作准备的，在第五章富比尼定理之前还要进一步加以讨论，读者通过后面的学习将会逐步地深入理解与掌握它们，此处可不必急于求成。

补充例题

例1　任意点集E的外测度等于包含它的开集G的外测度的下确界，即

$$m^*E=\inf_{G\supseteq E}\{m^*G\}$$

证明　1°　因对包含E的任意开集G，恒有$m^*E\leqslant m^*G$，故有

$$m^*E\leqslant\inf_{G\supseteq E}\{m^*G\}$$

2° 设开长方体列$\{I_n\}$，使$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \supseteq E$，则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ 是开集，故有

$$\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \supseteq E} \subseteq \{G\}_{G\supseteq E}$$

其中G是开集．于是结合1°有

$$m^*E \leqslant \inf_{G\supseteq E}\{m^*G\} \leqslant \inf_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \supseteq E}\left\{m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)\right\}$$

$$\leqslant \inf_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \supseteq E}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\right\} = m^*E$$

综上得证

$$m^*E = \inf_{G\supseteq E}\{m^*G\}.$$

例 2 设E_1可测，E_2是任意点集，则

$$m^*(E_1\cup E_2) + m^*(E_1\cap E_2) = mE_1 + m^*E_2$$

证明 若 mE_1，m^*E_2 中至少有一个为$+\infty$，则显然结论正确．

现设 $mE_1 < +\infty$，$m^*E_2 < +\infty$．由E_1的可测性，则于任意T，恒有

$$m^*T = m^*(T\cap E_1) + m^*(T\cap \mathscr{C}E_1) \qquad (1)$$

令 $T = E_1\cup E_2$，并代入式（1）得

$$m^*(E_1\cup E_2) = m^*[(E_1\cup E_2)\cap E_1] + m^*[(E_1\cup E_2)\cap \mathscr{C}E_1]$$

$$= m^*E_1 + m^*(E_2\cap \mathscr{C}E_1) \qquad (2)$$

再令 $T = E_2$，并代入（1）式得

$$m^*E_2 = m^*(E_2\cap E_1) + m^*(E_2\cap \mathscr{C}E_1) \qquad (3)$$

结合式（2）及式（3），且注意到 $m^*E_1=mE_1$，得

$$m^*(E_1\cup E_2)+m^*(E_1\cap E_2)=mE_1+m^*E_2.$$

例 3　设$\{E_n\}$是增加集列：

$$E_1\subseteq E_2\subseteq\cdots\subseteq E_n\subseteq\cdots$$

则

$$m^*(\lim_{n\to\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}m^*E_n$$

证法一　令$E=\lim\limits_{n\to\infty}E_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，则于任何自然数 n，都有 $E\supseteq E_n$，故

$$m^*E\geqslant m^*E_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

又因 $E_{n+1}\supseteq E_n$，$mE^*_{n+1}\geqslant m^*E_n$，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}m^*E_n$ 存在（可能为$+\infty$），从而有

$$m^*E\geqslant\lim_{n\to\infty}m^*E_n$$

即

$$m^*(\lim_{n\to\infty}E_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}m^*E_n\qquad(1)$$

另一方面，由例 1 知，于任意的 $\varepsilon>0$ 和每个n，都有开集 $G_n\supseteq E_n$，使

$$m^*G_n<m^*E_n+\varepsilon\qquad(2)$$

令 $A^{(n)}=\bigcap\limits_{i=n}^{\infty}G_i$，则$A^{(n)}$为可测增加集列，并且$G_n\supseteq A^{(n)}\supseteq E_n$ 及

$$m^*G_n\geqslant m^*A^{(n)}\qquad(3)$$

由式（2）和（3）知，对任何n，恒有

$$m^*A^{(n)}<m^*E_n+\varepsilon$$

故

$$\lim_{n\to\infty} m^*A^{(n)}\leqslant\lim_{n\to\infty} m^*E_n+\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，则有

$$\lim_{n\to\infty} m^*A^{(n)}\leqslant\lim_{n\to\infty} m^*E_n \tag{4}$$

因为$A^{(n)}$是可测增加集列，则由§2定理10知

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A^{(n)}\right)=m^*\left(\lim_{n\to\infty} A^{(n)}\right)=\lim_{n\to\infty}m^*A^{(n)}$$

又因 $A^{(n)}\supseteq E_n$，所以$\bigcup_{n=1}^{\infty}A^{(n)}\supseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，故

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A^{(n)}\right)=\lim_{n\to\infty} m^*A^{(n)} \tag{5}$$

由式（4）和（5）得

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant\lim_{n\to\infty} m^*E_n$$

即

$$m^*(\lim_{n\to\infty} E_n)\leqslant\lim_{n\to\infty} m^*E_n \tag{6}$$

于是由式（1）和（6）便得

$$m^*(\lim_{n\to\infty} E_n)=\lim_{n\to\infty} m^*E_n.$$

证法二 由§4定理5知，对每个E_n，都有G_δ型集$G_n\supseteq E_n$，使 $mG_n=m^*E_n$。现在取

$$G_1\subseteq G_2\subseteq\cdots\subseteq G_n\subseteq\cdots$$

（这是可以办到的！）令

$$G=\lim_{n\to\infty} G_n,\ E=\lim_{n\to\infty} E_n.$$

则显然有 $G\supseteq E$，且G可测，故有

$$mG\geqslant m^*E.$$

于是，对集列$\{G_n\}$应用§3定理10，便得

$$m^*(\lim_{n\to\infty} E_n) = m^*E \leqslant mG = \lim_{n\to\infty} mG_n = \lim_{n\to\infty} m^*E_n.$$

即

$$m^*(\lim_{n\to\infty} E_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} m^*E_n \tag{7}$$

另一方面，显然有$E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_n$，故

$$m^*E_n \leqslant m^*(\lim_{n\to\infty} E_n)$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty} m^*E_n \leqslant m^*(\lim_{n\to\infty} E_n) \tag{8}$$

由式（7）和（8）知，

$$m^*(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m^*E_n.$$

例 4　试构造一个可测集E，使E不含任何区间，且 $mE>0$。

解　我们在$[0, 1]$中取一个子集E，使E满足所要求的条件。

1°　把$[0, 1]$中以其中点为中心，长为$\frac{1}{4}$的开区间去掉，记为 $I_1^{(1)}$。余下的两个闭区间记为 $\Delta_1^{(1)}$，$\Delta_2^{(1)}$；

2°　把区间$\Delta_1^{(1)}$，$\Delta_2^{(1)}$ 的以其中点为中心，长为$\frac{1}{4^2}$的两个开区间分别去掉，记为 $I_1^{(2)}$，$I_2^{(2)}$ 。余下的四个闭区间分别记为 $\Delta_1^{(2)}$，$\Delta_2^{(2)}$，$\Delta_3^{(2)}$，$\Delta_4^{(2)}$；

3°　这种手续继续下去，我们得到一个点集 $E=[0, 1]-\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_j^{(n)}$。显然$E$是可测集，且不含有任何区间。但是

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}}I_i^{(n)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{n-1}}mI_i^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot\frac{1}{4^n}=\frac{1}{2}.$$

故有

$$mE=m[0,1]-m\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}}I_i^{(n)}\right]=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0.$$

例 5　若 $mE=1$，E_1，E_2，…，E_n是E的 n 个可测子集，且$mE_1+mE_2+\cdots+mE_n>n-1$，则

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{n}E_i\right)>0.$$

证明　因为$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}E_i=E\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}E_i\right)=E\cap\mathscr{C}\left(\mathscr{C}\left(\bigcap_{i=1}^{n}E_i\right)\right)$

$$=E\cap\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{C}E_i\right)$$

$$=E-\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{C}E_i\quad（\mathscr{C}E_i\text{是}E_i\text{关于}E\text{的补}）$$

所以

$$E=\left(\bigcap_{i=1}^{n}E_i\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{C}E_i\right)$$

且

$$mE=m\left(\bigcap_{i=1}^{n}E_i\right)+m\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{C}E_i\right)$$

故

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{n}E_i\right)=mE-m\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{C}E_i\right)=1-m\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{C}E_i\right)\quad(*)$$

又因 $E=E_i\cup\mathscr{C}E_i$（$i=1$，2，…，n），所以

$$mE = mE_i + m(\mathscr{C} E_i)$$

即

$$m(\mathscr{C} E_i) = mE - mE_i = 1 - mE_i \qquad (1)$$

由式（1）可得

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{C} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m\ (\mathscr{C} E_i) = \sum_{i=1}^{n} (1 - mE_i)$$

$$= n - \sum_{i=1}^{n} mE_i \qquad (2)$$

但$\sum_{i=1}^{n} mE_i > n - 1$，故由式（2）知

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{C} E_i\right) < 1 \qquad (3)$$

比较式（3）与(＊)便有

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) > 0.$$

第四章　可测函数学习指导

为了以后建立新积分理论的需要，本章引进一个新的函数类——可测函数类．为此，先给出一般点集上函数的某些概念和性质，并在此基础上讨论了可测集上的可测函数问题．

在学习本章时，应注意以下几点：

1　关于可测函数的概念

可测函数的定义是分两步给出的：第一步是对非负函数（它是一列非负、简单、不减函数的极限）；第二步是对一般函数（它是两个非负可测函数的代数和）．非负可测函数的几何意义用下方图形来说明．对一般可测函数给出了一些充要条件，这些条件都是判断函数可测的有力工具，应该牢固熟练地掌握和应用它们．

2　可测函数的基本运算性质

可测函数关于加、减、乘、除四则运算（当然，关于除法运算要求除函数几乎处处不为零）和极限运算都是封闭的．可测函数的上、下确界函数；上、下极限函数还是可测的．所有这些性质反映了可测函数运算性质是比较好的，是方便的．于是在可测函数类中，通过代数四则运算和极限运算之后，不会出现可测函数类之外的新函数．即可测函数类对上述运算构成了一个封闭系统．

3　可测函数的构造

我们以熟知的一些函数来认识可测函数．其实一般常见的

连续函数、单调函数都是可测函数，所以，可测函数类比连续函数类要广泛得多．而鲁金定理指出了可测函数与连续函数间的密切关系．通过这个定理常常能把有关一般可测函数的问题转化成关于连续函数的讨论，从而使问题得到简化．它表明可测函数与连续函数还是很相近的．

4　可测函数列的收敛性

关于可测函数列的收敛性是一个十分重要的问题．这里给出了几乎处处收敛和依测度收敛等概念．叶果洛夫定理揭示了可测函数列几乎处处收敛与一致收敛之间的关系．通过这个定理，可以把不一致收敛的函数列部分的“恢复”一致收敛性．而一致收敛在许多问题中都起着主要的作用．勒贝格定理告诉我们：在具有有限测度的集合E上，几乎处处收敛的可测函数列必是依测度收敛的；反之，并不成立．但黎斯定理指出：在测度有限的可测集E上的依测度收敛的可测函数列必有子列为几乎处处收敛的．

5　关于论证方法和基本技能方面值得注意的几个问题：①§2定理1中充分性证明的构造法是很有意思的，读者应深入体会；②鲁金定理证明中先考虑简单函数然后再往一般的可测函数过渡，这种由特殊到一般的论证问题的方法在许多场合下是行之有效的；③叶果洛夫定理的证明中把一个函数列的不收敛点作成一个集合的手法是富有启发性的；④判断可测集上的函数的可测性是本章的基本技能之一．可测函数定义的多种等价形式是判断可测函数的有力工具，应能熟练的运用．

补 充 例 题

例1　E上的函数$f(x)$在点x_0连续的要充条件是对任意收敛于x_0的序列$\{x_n\}$，恒有$\{f(x_n)\}$收敛于$f(x_0)$．

证明 必要性 由 $f(x)$ 在点x_0连续，往证：对于E中的任意点列$\{x_n\}$收敛于x_0恒有$\{f(x_n)\}$收敛于 $f(x_0)$.

已知 $f(x)$在点x_0连续，即对任意给定的 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$, 当 $x\in N(x_0, \delta)\cap E$时，使 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$成立。由于序列$\{x_n\}$收敛于 x_0，故可找到N，使得对于所有的 $n>N$, $x_n\in N(x_0, \delta)\cap E$。从而，对于所有的 $n>N$，使得 $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$。即序列 $\{f(x_n)\}$收敛于 $f(x_0)$.

充分性 已知对于E中的任意序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 恒有$\{f(x_n)\}$收敛于 $f(x_0)$，往证：$f(x)$在x_0点连续.

用反证法。假设 $f(x)$在x_0点不连续，即存在 $\varepsilon>0$，对任意 $\delta>0$，常有 $x\in N(x_0, \delta)\cap E$，使得：

$$|f(x)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$$

由此，对 $\varepsilon>0$，设 $\delta_n=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 在点 x_0 的邻域 $N\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$内可以取到点 $x_n\in E$，使得：

$$|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$$

由$\{x_n\}$的取法知，当 $n\to\infty$时 $x_n\to x_0$，且恒有

$$|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$$

故序列 $\{f(x_n)\}$不收敛于 $f(x_0)$。这与题设条件矛盾，故$f(x)$在点x_0必连续.

例2 设E是可测集，$f(x)$是E上定义的函数，试证下列条件等价.

（1）对任何实数a，$\{x\mid f(x)\geqslant a\}$ 都是可测集；

（2）对任何实数a，$\{x\mid f(x)>a\}$ 都是可测集；

（3）对任何实数a，$\{x\mid f(x)\leqslant a\}$ 都是可测集；

（4）对任何实数a，$\{x\mid f(x)<a\}$ 都是可测集；

（5）对于任意α及$\beta>\alpha$，$\{x \mid \alpha \leqslant f(x)<\beta\}$都是可测集。

证明 (1)→(2)若对任何实数α，集$\{x \mid f(x) \geqslant \alpha\}$皆为可测集，往证对任何实数$\alpha$，$\{x \mid f(x)>\alpha\}$皆可测。

事实上，由于$\{x \mid f(x)>\alpha\}=\{x \mid f(x) \geqslant \alpha\} \backslash\{x \mid f(x)=\alpha\}$。故只须观察$\{x \mid f(x)=\alpha\}$是否可测？

而

$$
\begin{aligned}
\{x \mid f(x)=\alpha\} &=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid \alpha \leqslant f(x)<\alpha+\frac{1}{n}\right\} \\
&=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\{x \mid f(x) \geqslant \alpha\} \Big\backslash\left\{x \mid f(x) \geqslant \alpha+\frac{1}{n}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

故$\{x \mid f(x)=\alpha\}$可测，从而对任意α，$\{x \mid f(x)>\alpha\}$必可测。

（2）→（3）若对任何实数α，集$\{x \mid f(x)>\alpha\}$皆为可测集，往证对任何实数α，$\{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}$皆为可测集。

事实上，

$$
\{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}=E \backslash\{x \mid f(x)>\alpha\}
$$

故对任意实数α，$\{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}$必为可测集。

（3）→（4）若对任意实数α，集$\{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}$皆为可测集，往证对任意实数$\alpha$，$\{x \mid f(x)<\alpha\}$皆为可测集。

而

$$
\{x \mid f(x)<\alpha\}=\{x \mid f(x) \leqslant \alpha\} \backslash\{x \mid f(x)=\alpha\}
$$

且

$$
\begin{aligned}
\{x \mid f(x)=\alpha\} &=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid \alpha-\frac{1}{n}<f(x) \leqslant \alpha\right\} \\
&=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\{x \mid f(x) \leqslant \alpha\} \Big\backslash\left\{x \mid f(x) \leqslant \alpha-\frac{1}{n}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

故知对任意实数α，$\{x \mid f(x)<\alpha\}$必为可测集。

（4）→（5）若对任意实数a，集 $\{x \mid f(x)<a\}$ 可测，往证对于任意a及$\beta>a$，$\{x \mid a \leqslant f(x)<\beta\}$都是可测集.

事实上，由

$$\begin{aligned}\{x \mid a \leqslant f(x)<\beta\} &= \{x \mid f(x) \geqslant a\} \cap \{x \mid f(x)<\beta\} \\ &= [E \setminus \{x \mid f(x)<a\}] \cap \{x \mid f(x)<\beta\}\end{aligned}$$

得到对任意实数a及$\beta>a$，必有$\{x \mid a \leqslant f(x)<\beta\}$皆可测.

（5）→（1）若对任意实数a及$\beta>a$，集$\{x \mid a \leqslant f(x)<\beta\}$可测，往证对任意实数 a，$\{x \mid f(x) \geqslant a\}$ 皆可测．事实上．由

$$\{x \mid f(x) \geqslant a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid a \leqslant f(x)<a+n\}$$

立即推出 $\{x \mid f(x) \geqslant a\}$对任意实数$a$皆为可测集.

此例表明：其中的每个条件都可以作为可测函数的定义.

例 3　设 $f(x)$是E上的可测函数，$\varphi(y)$ 为其值域上的单调函数，则$\varphi(f(x))$在E上也是可测函数.

证明　不妨设$\varphi(y)$是不减的，对任意实数a，设

$$b=\inf\{y \mid \varphi(y) \geqslant a\} \tag{1}$$

若　$b \in \{y \mid \varphi(y) \geqslant a\}$，则

$$\{x \mid \varphi(f(x)) \geqslant a\} = \{x \mid f(x) \geqslant b\},$$

若　$b \notin \{y \mid \varphi(y) \geqslant a\}$，则

$$\{x \mid \varphi(f(x)) \geqslant a\} = \{x \mid f(x)>b\}$$

因为 $f(x)$是E上可测函数，从而上述二等式右端皆为可测集，故其左端为可测集，于是由a的任意性知，$\varphi(f(x))$ 是E上可测函数.

例 4　试举例说明当 $mE=\infty$ 时，叶果洛夫定理不再成立.

考虑 $(0,\infty)$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$，

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in(n-1,\ n)\\ 0 & x\overline{\in}(n-1,n)\end{cases}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

显然 $\{f_n(x)\}$ 为可测函数列，且 $f_n(x)\to0\ (n\to\infty)$。

但若给定 $\varepsilon_1=\frac{1}{2}$，则对每个 $f_n(x)$ 总存在测度为 1 的集，在其上函数值为 1，故函数 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛于0，即总找不出满足定理结论的 E_1，使得在 $E\setminus E_1$ 上函数列 $\{f_n(x)\}$ 能一致收敛于 0。

例 5 可测集 E 上几乎处处有限的函数 $f(x)$,，若对于任意 $\varepsilon>0$，有连续函数 $\varphi(x)$，使 $m\{x\mid f(x)\neq\varphi(x)\}<\varepsilon$，则 $f(x)$ 为 E 上的可测函数。

证明 只须证对任意实数 a，$\{x\mid f(x)>a\}$ 皆为可测集。

对于 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$，有连续函数 $\varphi_n(x)$，设

$$E_n=\{x\mid f(x)\neq\varphi_n(x)\}$$

由已知

$$mE_n=m\{x|f(x)\neq\varphi_n(x)\}<\frac{1}{n}\tag{1}$$

令

$$M=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\setminus E_n)\ \text{且}\ N=E\setminus M\tag{2}$$

则

$$mN=m(E\setminus M)=m\Big(E\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\setminus E_n)\Big)$$

$$=m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}E\setminus(E\setminus E_n)\Big)$$

$$=m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant mE_n<\frac{1}{n}.$$

上式对任意n成立，又 $mN\geqslant 0$，所以$mN=0$．即N为零集．

由（2）知，$E=M\cup N$，故对任意实数 a，集合

$$\{x|f(x)>a,x\in E\}$$
$$=\{x|f(x)>a,x\in M\}\cup\{x|f(x)>a,x\in N\}$$
$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|f(x)>a,x\in E\setminus E_n\}\cup\{x|f(x)>a,x\in N\}$$

故对任意实数 a，$\{x|f(x)>a\}$必为可测集，即 $f(x)$ 是E上的可测函数．

例 6 若E测度有限，$f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，$g(x)$ 是几乎处处有限的可测函数，则 $f_n(x)g(x)\Longrightarrow f(x)g(x)$．

证明 只须证：对任意$\sigma>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} m\{x\,\big|\,|f_n(x)g(x)-f(x)g(x)|\geqslant\sigma\}=0$$

已知

$$\{x\,\big|\,|g(x)|=\infty\}=\bigcap_{N=1}^{\infty}\{x\,\big|\,|g(x)|>N\}\ \text{且}$$

$m\{x\,\big|\,|g(x)|=\infty\}=0$．

设 $R_N=\{x\,\big|\,|g(x)|>N\}$，则 $\{R_N\}$是单调下降的可测集列，因 $mE<\infty$，故

$$0=m\{x\,\big|\,|g(x)|=\infty\}$$
$$=m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\{x\,\big|\,|g(x)|>N\}\right)=\lim_{N\to\infty} mR_N$$

故对任意$\varepsilon>0$，存在N，使得

$$mR_N=m\{x\,\big|\,|g(x)|>N\}<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(1)$$

对应N，ε，必有N_0，使在 $n \geqslant N_0$时，有

$$m\left\{x \,\middle|\, |f_n(x)-f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{N}\right\} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

而对任意 $\sigma > 0$，$\{x \,|\, |f_n(x)g(x)-f(x)g(x)| \geqslant \sigma\}$

$$= \{x \,|\, |f_n(x)-f(x)|\,|g(x)| \geqslant \sigma\} \subseteq \left\{x \,\middle|\, |f_n(x)-f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{N}\right\} \cup \{x \,|\, |g(x)| > N\}$$

于是

$$m\{x \,|\, |f_n(x)g(x)-f(x)g(x)| \geqslant \sigma\}$$

$$\leqslant m\left\{x \,\middle|\, |f_n(x)-f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{N}\right\} + m\{x \,|\, |g(x)| > N\}$$

由（1）与（2），从而有

$$0 \leqslant m\{x \,|\, |f_n(x)g(x)-f(x)g(x)| \geqslant \sigma\} < \varepsilon$$

（对任意 $\varepsilon > 0$，当$n \to \infty$时成立）。

所以 $\lim\limits_{n \to \infty} m\{x \,|\, |f_n(x)g(x)-f(x)g(x)| \geqslant \sigma\} = 0$。

第五章　勒贝格积分学习指导

本章的中心内容是建立一种新的积分——勒贝格积分理论。它也是实变函数论要研究的核心问题。

在学习本章时，应注意以下几个问题。

1　关于勒贝格积分的建立。

本章首先引入有界函数在测度有限点集上的勒贝格积分。这是全章的基础。建立有界函数的积分，要注意两点：一是黎曼积分意义下的积分区间，现已被一般点集所代替；二是分划的小区间长度，现已被点集的测度所代替。

测度有限点集上的一般函数的勒贝格积分是通过两步完成的。第一步是建立一般非负函数的积分；第二步是建立一般函数的积分。它是通过将一般函数分解成两个非负函数的代数和的办法来完成的。

至于一般函数 $f(x)$ 在一般可测集 E 上的积分也是分两步建立的。亦是先考虑非负函数，再过渡到一般函数。

2　勒贝格积分的性质

(a) 勒贝格积分是一种绝对收敛的积分，即 $f(x)$ 在 E 上可积当且仅当 $|f(x)|$ 在 E 上是可积的（$f(x)$ 在 E 上可测）。它是有别于黎曼积分性质的。

(b) 勒贝格积分具有绝对连续性。设 $f(x)$ 在 E 上可积，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $e\subseteq E$，且 $me<\delta$ 时，有

$$\left|\int_e f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

(c) 勒贝格积分的唯一性：$\int_E |f(x)|dx = 0$ 的充要条件是 $f(x)=0$ $p.p$于E。

由此可知，若 $f(x)$ 与$g(x)$几乎处处相等，则它们的可积性与积分值均相同。

(d) 可积函数可以用连续函数去逼近的性质：设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的可积函数，对任意的$\varepsilon>0$，有$[a,b]$ 上的连续函数$\varphi(x)$，使

$$\int_{[a,b]} |f(x)-\varphi(x)|\,dx < \varepsilon$$

此外尚有许多与黎曼积分类似的性质如线性性、介值性、单调性等等在此不赘述，望读者自己总结、比较之。

3　勒贝格积分序列的收敛性

关于积分的极限定理，是本章的重点内容。这是由于积分号下取极限、逐项积分无论在积分理论上还是在实际计算上，都有着十分重要的意义，因此希望读者一定要很好的掌握这一部分的内容，特别是下述的几个重要定理：

(a) 勒贝格有界收敛定理；

(b) 勒贝格逐项积分定理；

(c) 勒维渐升函数列的积分定理；

(d) 法都引理；

(e) 勒贝格控制收敛定理。

其中勒贝格控制收敛定理，勒维定理和法都引理通常被称为勒贝格积分的三大定理。它们在现代数学中有着广泛的应用。

通过学习上述积分极限定理，读者不难发现，与黎曼积分

的极限定理相比较得知，勒贝格积分关于极限换序的条件大大弱于黎曼积分，这正是勒贝格积分受到人们倍加重视的原因之一。

4　勒贝格积分与黎曼积分之间的关系。

本章§2中，已给出了$[a, b]$上的有界函数勒贝格积分与黎曼积分的关系：若$[a,b]$上的有界函数$f(x)$黎曼可积则必勒贝格可积，且$(L)\int_a^b f(x)\,dx=(R)\int_a^b f(x)\,dx$。

不仅如此，我们将在下面的补充例题5中，给出一个更重要的结果：$[a,b]$上有界函数黎曼可积的充要条件是$f(x)$在$[a, b]$上几乎处处连续。黎曼可积函数这一本质特征，仅从黎曼积分理论自身是得不出来的，它必须借助于勒贝格积分理论才能得到。

值得注意的是，上述结论对于广义黎曼积分并不成立。而广义黎曼积分与勒贝格积分之间的正确关系是本章§6习题5给出的，即广义黎曼可积函数成为勒贝格可积的充要条件是该函数广义黎曼绝对可积。

5　关于勒贝格积分的计算

勒贝格积分可以通过下述一些途径进行计算：

(a) 应用积分定义；

(b) 借助积分性质；

(c) 应用积分极限定理；

(d) 转化为黎曼积分。

值得注意的是有些黎曼积分，反而需要借助于勒贝格积分来计算（见补充例题6）。

6　二重积分换序问题

勒贝格二重积分换序的富比尼定理给出了极弱的条件。即

只要 $f(x, y)$ 在 $R^p \times R^q$ 上可积即可将二重积分化为累次积分。特别是对非负可测函数来讲，即可无条件换序。这当然也是勒贝格积分较之黎曼积分优越的地方。

7　微分与积分的关系

本章§8用测度论的观点研究了一维情形下的微分与积分的关系。主要结果是绝对连续函数是它的导数的不定积分（或一个函数为绝对连续的充要条件是此函数满足牛顿——莱布尼兹公式）。由于绝对连续函数是有界变差函数，而有界变差函数又可表为两个（非负）单调增加函数之差，所以本章这部分内容是从讨论单调函数的分析性质开之所在。

补 充 例 题

例1　证明

$$\int_{(0,1)} \frac{x^p}{1-x} \ln\frac{1}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2} \quad (p > -1)$$

证明　因在 $(0,1)$ 上，成立着

$$\frac{x^p}{1-x} \ln\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{p+n} \ln\frac{1}{x}$$

而且 $x^{p+n}\ln\frac{1}{x}$，$(n=0, 1, 2, \cdots)$ 是 $(0,1)$ 上的非负可测函数，

于是由勒贝格逐项积分定理得

$$\int_{(0,1)} \frac{x^p}{1-x} \ln\frac{1}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(0,1)} x^{p+n} \ln\frac{1}{x}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (R) \int_0^1 x^{p+n} \ln\frac{1}{x}\, dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{p+n+1}}{p+n+1}\ln\frac{1}{x}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x^{p+n}}{n+p+1}dx\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(p+n+1)^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}$$

例2 证明当 $0<a<1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{a-1}dx=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{a-1}dx$$

证明 令

$$f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{a-1} & \text{当}x\leqslant n\text{时}\\ 0 & \text{当}x>n\text{时}\end{cases}$$

则有

$$|f_n(x)|\leqslant F(x)=\begin{cases}x^{a-1} & \text{当}0<x<1\text{时}\\ e^{-x} & \text{当}x\geqslant 1\text{时}\end{cases}$$

易知$F(x)$在$(0,\ \infty)$上可积，且 $f_n(x)\to e^{-x}x^{a-1}$ $(n\to\infty)$，依勒贝格控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{a-1}dx=\int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{a-1}dx$$

例3 设 $f(x,\ t)$当 $|t-t_0|<\delta$时是x在$[a,\ b]$上的可积函数，又有常数k，使

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,\ t)\right|\leqslant k,\quad a\leqslant x\leqslant b,\quad |t-t_0|<\delta$$

则

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,\ t)dx=\int_a^b f'_t(x,\ t)dx \qquad (*)$$

证明 我们从含参变量积分所确定的函数的定义出发，令

$$I(t)=\int_a^b f(x,\ t)dx \quad 当\ |t-t_0|<\delta$$

则

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,\ t)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{I\left(t+\frac{1}{n}\right)-I(t)}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\frac{f\left(x,\ t+\frac{1}{n}\right)-f(x,\ t)}{\frac{1}{n}}dx \quad (1)$$

由于函数 $f(x,\ t)$当 $|t-t_0|<\delta$时，对于t可微，因此我们欲证($*$)式成立，只须证明（1）式右端的极限与积分可交换顺序。而据题设条件，我们试图通过应用勒贝格有界收敛定理达到这一目的。

对于每一 $t\in(t_0-\delta,\ t_0+\delta)$，都有 $N(t)$，当$n\geqslant N(t)$时，$t+\frac{1}{n}\in(t_0-\delta,\ t_0+\delta)$，于是当$n\geqslant N(t)$时，有

$$\left|\frac{f\left(x,t+\frac{1}{n}\right)-f(x,t)}{\frac{1}{n}}\right|=\left|f_t'\left(x,t+\theta\cdot\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant k$$

(上式中的等号是微分中值定理，其中 $0<\theta<1$)即当$n\geqslant N(t)$时，（1）式右端的被积函数列一致有界，且它们是$[a,\ b]$上的可测函数列。又显然，

$$f'_t(x,t)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x,t+\frac{1}{n}\right)-f(x,t)}{\frac{1}{n}}$$

于是由勒贝格有界收敛定理，结合（1）式有

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\frac{f\left(x,t+\frac{1}{n}\right)-f(x,t)}{\frac{1}{n}}dx$$

$$=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x,t+\frac{1}{n}\right)-f(x,t)}{\frac{1}{n}}\right)dx$$

$$=\int_a^b f_t'(x,t)\,dx$$

例 4 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可积函数列，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ $p.p$于E，且存在常数K，使

$$\int_E|f_n(x)|\,dx<K$$

则 $f(x)$在E上可积。

证明 设 $E_0=\{x|\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),x\in E\}$，于是在$E_0$上，$|f_n(x)|\to|f(x)|$ $(n\to\infty)$。

由法都引理可得

$$\int_{E_0}|f(x)dx=\int_{E_0}\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|\,dx\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)|dx\leqslant K$$

由题设知$m(E\setminus E_0)=0$，故

$$\int_{E\setminus E_0}|f(x)|\,dx=0$$

所以 $$\int_E |f(x)|dx=\int_{E_0}|f(x)|dx\leqslant K<+\infty$$

于是$|f(x)|$在E上可积，从而$f(x)$在E上可积。

作为控制收敛定理的一个应用，我们给出下面的一个重要结论。

例 5 $[a, b]$上的有界函数$f(x)$黎曼可积的充要条件是$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处连续（即$f(x)$在$[a, b]$上所有不连续点组成的集的测度为零）。

证明 取$[a,b]$的一列分划$\{D_n\}$：

$$a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{l_n}^{(n)}=b$$

使$D_n\subseteq D_{n+1}$，且$\max\limits_K(x^{(n)}_K-x^{(n)}_{K-1})\to 0$，$n=1, 2, \cdots$

用$m^{(n)}_K$，$M^{(n)}_K$表示$f(x)$在$[x^{(n)}_{K-1}, x^{(n)}_K]$中的下确界、上确界。作函数列$\{\varphi_n(x)\}$和$\{\psi_n(x)\}$如下：

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}m^{(n)}_K & x\in(x^{(n)}_{K-1}, x^{(n)}_K]\\ f(a) & x=a\end{cases}$$

$$\psi_n(x)=\begin{cases}M^{(n)}_K & x\in(x^{(n)}_{K-1}, x^{(n)}_K]\\ f(a) & x=a\end{cases}$$

由于$D_n\subseteq D_{n+1}$，当区间缩小时，上确界不增，下确界不减，所以

$$\psi_1(x)\geqslant\psi_2(x)\geqslant\cdots\geqslant\psi_n(x)\geqslant\cdots\geqslant f(x)$$

$$\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\cdots\leqslant f(x)$$

记$\overline{f}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)$；$\underline{f}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$。显然

$$\underline{f}(x)\leqslant f(x)\leqslant\overline{f}(x) \qquad (1)$$

并且$\underline{f}(x)$、$\overline{f}(x)$作为简单函数列的极限，可知它们都是$[a,b]$上的可测函数。（见第四章§3习题8）。

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$上有界，故有常数 K，使 $|f(x)|\leqslant K$。于是可知 $|\psi_n(x)|\leqslant K$，$|\varphi_n(x)|\leqslant K$，应用有界函数的勒贝格积分定义知

$$(L)\int_a^b \varphi_i(x)dx=\sum_{K=1}^{n}\int_{x_{K-1}^{(i)}}^{x_K^{(i)}}\varphi_i(x)dx$$

$$=\sum_{K=1}^{n} m^{(i)}{}_K[x^{(i)}{}_K-x^{(i)}{}_{K-1}]$$

$$=s_i \qquad (2)$$

其中s_i表示由第i个分划所得的达布小和，于是据勒贝格控制收敛定理（或有界收敛定理）及（2）式得

$$\lim_{i\to\infty}s_i=\lim_{i\to\infty}(L)\int_a^b\varphi_i(x)dx$$

$$=(L)\int_a^b\lim_{i\to\infty}\varphi_i(x)dx$$

$$=(L)\int_a^b\underline{f}(x)dx$$

同理可证，达布大和收敛于$\overline{f}(x)$的积分

$$\lim_{i\to\infty}S_i=(L)\int_a^b\overline{f}(x)dx$$

因此

$$S_i-s_i\to(L)\int_a^b[\overline{f}(x)-\underline{f}(x)]dx \qquad (3)$$

上述事实，对$[a,b]$上的任何有界函数都是对的。

下面我们来证明例题的结论。在数学分析中熟知有界函数$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积的充要条件是 $S_i-s_i\to0$ $(i\to\infty)$，所以结合（3）式即知 $f(x)$ 黎曼可积的充要条件是

$$(L)\int_a^b[\overline{f}(x)-\underline{f}(x)]dx=0 \qquad (4)$$

而（4）式成立当且仅当$\overline{f}(x)-\underline{f}(x)=0$几乎处处在$[a, b]$上成立。即

$$\overline{f}(x)=\underline{f}(x) \qquad p.p\text{于} [a, b]$$

从（1）式便知

$$\overline{f}(x)=f(x)=\underline{f}(x) \qquad p.p\text{于} [a, b] \tag{5}$$

用极限论的知识已经知道$f(x)$在点x连续的充要条件是（5）式成立，从而我们得到：

$[a,b]$上有界函数$f(x)$黎曼可积的充要条件是$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处连续。

例6 计算$(0,1)$上的黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\ (p,\ q\text{为互质的整数})\\ 0 & \text{当 } x\text{为无理数时}\end{cases}$$

的积分值。

解 根据上题结论即知黎曼函数$R(x)$是黎曼可积的。但如果用黎曼积分方法求其积分值是比较复杂的。而用勒贝格积分方法来求，就十分简便了。

事实上，令$A=\{x\,|\,x\text{为}(0,1)\text{中的有理数}\}$，$B=\{x\,|\,x\text{为}(0,1)\text{中的无理数}\}$。于是由上题结果有：

$$(R)\int_0^1 R(x)dx=(L)\int_{(0,1)} R(x)dx$$

$$=(L)\int_A R(x)dx+(L)\int_B R(x)dx$$

因$mA=0$，故

$$(L)\int_A R(x)dx=0$$

从而

$$(R)\int_0^1 R(x)\,dx=(L)\int_E R(x)\,dx=0$$

例 7　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ \infty)$上可积，试证 $f(x)$的积分具有绝对连续性。

证明　因 $f(x)$在 $(-\infty,\ \infty)$上可积，故对任意的正整数 n，$f(x)$ 在 $(-n,\ n)$ 上可积，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{(-n,n)}|f(x)|dx$ 存在且有限，故于任意的$\varepsilon>0$，存在正整数N，使

$$\int_{(-\infty,-N)}|f(x)|dx<\varepsilon/3,\ \int_{(N,\infty)}|f(x)|dx<\varepsilon/3 \qquad (1)$$

又因为 $f(x)$在有限区间 $(-N,N)$上可积，故由 $f(x)$ 在有限测度集上积分的绝对连续性，存在$\delta>0$，使当$me'<\delta(e'\subseteq(-N,N))$时有

$$\left|\int_{e'}|f(x)|dx\right|<\varepsilon/3 \qquad (2)$$

现设e是 $(-\infty,\ \infty)$上满足$me<\delta$的任一个集。那么

$$\int_e f(x)\,dx=\int_{e\cap(-N,N)}f(x)\,dx+\int_{e\cap(-\infty,-N)}f(x)\,dx+\int_{e\cap(N,\infty)}f(x)\,dx$$

从而由（1），（2）式得

$$\left|\int_e f(x)\,dx\right|\leqslant\int_{e\cap(-N,N)}|f(x)|dx+\int_{e\cap(-\infty,-N)}|f(x)|dx+\int_{e\cap(N,\infty)}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

命题得证。

例 8　若 $f(x)$ 在 $(0,\ \infty)$ 上L可积，且一致连续，则

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$。

证明　用反证法。若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\neq 0$，则存在某个 $\varepsilon_0>0$，不论正数N多么大，总能找到 $x_0>N$，使$|f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$。基于上述原因，我们能找到

$$x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots\to+\infty$$

满足

$$|f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0,\quad x_{n+1}-x_n>1, n=1,2,\cdots$$

由于 $f(x)$在 $(0,\infty)$上一致连续，故对上述的 $\varepsilon_0>0$，必有 $\delta_0>0$，当 $|x''-x'|<\delta_0$时，就有

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon_0/2$$

令 $\delta=\min\left\{\frac{\delta_0}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$，对序列$\{x_n\}$的每一点作邻域 $N(x_n,\ \delta)$，显然这些邻域是两两不交的，且对每一邻域 $N(x_n,\delta)$ 内任意一点 x，有

$$|x-x_n|<\delta_0$$

故

$$|f(x)-f(x_n)|<\varepsilon_0/2$$

于是

$$|f(x)|>|f(x_n)|-\varepsilon_0/2\geqslant\varepsilon_0-\varepsilon_0/2=\varepsilon_0/2$$

总之，对邻域族 $\{N(x_n,\ \delta)\}$中的任意一点x均有

$$|f(x)|>\varepsilon_0/2$$

据题设 $f(x)$ 在$(0,\ \infty)$上可积，所以 $|f(x)|$在 $(0,\ \infty)$上可积，但另一方面

$$\int_{(0,\infty)}|f(x)|\,dx\geqslant\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}N(x_n,\delta)}|f(x)|\,dx$$

$$>(\varepsilon_0/2)\cdot m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}N(x_n,\ \delta)\right)=+\infty$$

这与$|f(x)|$在$(0,\ \infty)$上可积矛盾．于是命题得证。

例9 在 $E=(0,\ 1)\times(0,\ 1)$上定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y} & \text{当}(x,\ y)\text{为}E\text{中的有理点时}\\ 0 & \text{当}(x,\ y)\text{为}E\text{中的其它点时}\end{cases}$$

其中 q_x，q_y 分别为 x，y 的既约分数的分母，求

$$\int_E f(x,\ y)\,dx\,dy$$

解 因为 $f(x,\ y)$在E上有界可测，所以 $f(x,\ y)$ 可积，据富比尼定理得

$$\int_E f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_{(0,1)}dx\int_{(0,1)}f(x,\ y)\,dy \qquad (*)$$

因为对任意固定的 x，$f(x,\ y)$ 关于 y 在$(0,1)$上几乎处处连续，因此对任意固定的 x，$f(x,\ y)$关于 y 可积，且

$$\int_{(0,1)}f(x,\ y)\,dy=0$$

于是

$$\int_{(0,1)}dx\int_{(0,1)}f(x,y)\,dy=\int_{(0,1)}0\ dx=0$$

从而由$(*)$式即得

$$\int_E f(x,\ y)\,dx\,dy=0$$

例10 函数 $f(x)$ 为有界变差的充要条件是存在增函数$\varphi(x)$，使得当$x_2>x_1$时，

$$f(x_2)-f(x_1)\leqslant\varphi(x_2)-\varphi(x_1)$$

证明 设 $f(x)$ 为有界变差函数，则存在两个非负增大函

数$\pi(x)$，$v(x)$，使 $f(x)=\pi(x)-v(x)$。

令 $\varphi(x)=\pi(x)$，则$\varphi(x)$为增函数，且对 $x_2>x_1$，有

$$f(x_2)-f(x_1)=\varphi(x_2)-\varphi(x_1)-[v(x_2)-v(x_1)]$$
$$\leqslant\varphi(x_2)-\varphi(x_1)$$

从而必要性得证。

充分性，令 $\pi(x)=\varphi(x)$，$v(x)=\varphi(x)-f(x)$。由所设知 $\pi(x)$为单调增加函数，且对任意$x_2>x_1$，有

$$v(x_2)-v(x_1)=\varphi(x_2)-\varphi(x_1)-[f(x_2)-f(x_1)]\geqslant 0$$

所以 $v(x)$ 是单调增加函数，而 $f(x)=\pi(x)-v(x)$，从而 $f(x)$表为两个非负单调函数之差，故 $f(x)$ 为有界变差函数。

第六章　平方可积函数学习指导

本章所讨论的L_2空间，实际上是泛函分析基础知识的一部分，它也是新积分（勒贝格积分）的直接的重要应用．比如关于L_2空间完备性的黎斯——费希尔定理，只有在新的积分理论之下才可能成立．L_2空间无论在理论上、还是在实际上都是具有重要意义的．它是无穷维空间中与欧氏空间在性质上最为相似的一个空间．学习时，要与欧氏空间的性质相对照，要注意它们之间的相同与不同之处，这样会有助于对新概念的来源及本质的了解．在本章的学习中，应注意和掌握以下几个问题．

1　L_2空间按如下距离

$$\rho(f,\ g)=\left\{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

是一距离空间．其中$f,\ g\in L_2$．这里是把几乎处处相等的函数看作是同一元素．如果用F表示$[a,b]$上所有平方可积函数作成的集合，并把F中几乎处处相等的函数视为等价的，则可按这种等价关系把F分成等价类，使得同一类中任意两个函数都是几乎处处相等的，而属于不同类的函数则不是几乎处处相等的．因此，L_2中的元素实际上就是等价类，这一点在学习时应当特别注意．

我们在L_2中引入了内积和范数，正因为这样，才使得它具有同欧氏空间类似的许多良好性质．在证明L_2是距离空间时，我们介绍了两个重要不等式——许瓦兹不等式和哥西不等式．

这是两个重要的不等式，它们（特别是许瓦兹不等式）在许多场合都有重要的应用。

2　L_2空间中的平均收敛。若L_2中的元素列$\{f_n\}$及元素f，使

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b[f_n-f]^2dx=0$$

成立，则称$\{f_n\}$平均收敛于f。记作$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$。这是一个新的收敛性概念，它不同于在数学分析中学过的逐点收敛的概念。要注意，它们之间是互不蕴含的。在L_2中凡提到收敛，除特殊声明，指的都是平均收敛。平均收敛在微分方程、概率论、计算数学等许多方面都有着广泛的应用。要注意掌握这种收敛的定义及实质所在。我们也介绍了弱收敛的概念，这也是泛函分析中一种重要的收敛性概念，要注意掌握平均收敛、弱收敛以及度量收敛之间的关系。

3　L_2空间的完备性、可分性和非局部列紧性。完备性，可分性和非局部列紧性是L_2空间的基本性质，其中完备性和可分性是同欧氏空间类似的，而非局部列紧性则是它同欧氏空间的重大差别。关于L_2空间的黎斯——费希尔定理是一个异常重要的定理，L_2空间中许多性质的讨论都是以它为基础的。L_2空间可分性的证明，其手法颇为典型，应很好的学习和掌握。

4　L_2空间中的坐标系问题。坐标系的引进对研究L_2空间的性质是至关重要的。学习时，要注意掌握标准正交系的概念，标准正交系的封闭性与完全性以及它们之间的等价性。特别地，三角函数系

$$T:\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots$$

是L_2空间中一个完全的标准正交系。本章§4中介绍的两个公式

——贝塞尔不等式和巴塞瓦尔等式是很重要的两个公式。贝塞尔不等式是说，L_2中任一元素f关于任一标准正交系$\{\varphi_k\}$的付立叶系数$c_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$ 的平方和作成的级数都是收敛的，即

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2$$

当$\{\varphi_k\}$完全时，上式中等号成立，即

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$$

这就是巴塞瓦尔等式。它可以看作欧氏空间中勾股定理在希尔伯特空间中的推广。其实，标准正交系是完全的充要条件是对任意$f\in L_2$巴塞瓦尔等式成立。这就给出了一个标准正交系完全性的判定准则。

补 充 例 题

例1 设 $f_1,\ f_2\in L_2$，证明

$$\|f_1+f_2\|^2+\|f_1-f_2\|^2=2(\|f_1\|^2+\|f_2\|^2) \quad (1)$$

证明 只要把范数用内积来表示，就得到

$$\begin{aligned}\|f_1+f_2\|^2+\|f_1-f_2\|^2&=(f_1+f_2,f_1+f_2)+(f_1-f_2,f_1-f_2)\\&=2(f_1,\ f_1)+2(f_2,\ f_2)\\&=2(\|f_1\|^2+\|f_2\|^2)\end{aligned}$$

在二维实空间中，我们知道，平行四边形的对角线长度平方和等于各边长度的平方和，所以在L_2中，等式（1）也称为平行四边形公式。

例2 定义在$[a,\ b]$上所有连续函数组成的集合，这个集合记为 $c[a,\ b]$。对于$c[a,\ b]$中任意两个元素 $x(t)$，$y(t)$ 定

义它们的距离为

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \qquad (2)$$

证明 $c[a, b]$按上述距离成一完备的、可分的距离空间。

证明 1°先证 $c[a, b]$是距离空间。事实上，距离空间的条件(i)与(ii)是明显的，即：

(i) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$。

现在来验证三角不等式(iii)。设$x(t), y(t), z(t) \in c[a, b]$，则

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|$$
$$\leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |z(t) - y(t)|$$
$$= \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

因 $\rho(x, z)$与$\rho(z, y)$都是与t无关的实数，故

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

可见三角不等式亦成立，因此，$c[a, b]$ 按距离（2）确为距离空间。

2° 次证 $c[a, b]$是完备的。往证 $c[a, b]$中任一基本列皆收敛。设 $\{x_n(t)\} \subseteq c[a, b]$是一基本列，于是对任意$\varepsilon > 0$，存在$N$，使得当$m$，$n > N$时，有

$$\rho(x_m, x_n) = \max_{a \leq t \leq b} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$$

亦即当 m，$n > N$时，$|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$对 $t \in [a, b]$ 一致地成立。由数学分析中连续函数列的一致收敛性定理知，存在$x_0(t) \in c[a, b]$，使

$$\rho(x_n, x_0) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_0(t)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

此即证得$c[a, b]$完备。

3° 再证 $c[a, b]$是可分的．事实上，所有多项式组成的集合在 $c[a, b]$中是稠密的，又由于有理数在实数中的稠密性知全体有理系数多项式组成的集合在所有多项式组成的集合中稠密，而全体有理系数多项式组成的集合是可数的，因此，$c[a, b]$是可分的．证毕．

例3 在 $c[a, b]$中定义如下距离

$$\rho_1(x, y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|dt \tag{3}$$

$x(t), y(t)\in c[a, b]$．则$c[a,b]$按距离（3）是一距离空间，但不完备．

证明 1° 先证 $c[a, b]$按距离（3）是一距离空间．其实这是容易验证的．事实上，

(i) $\rho(x, y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|dt\geqslant 0$．

$\rho(x, y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|dt=0$ 当且仅当 $x(t)-y(t)=0$ $p.p.$于 $[a, b]$，即 $x(t)=y(t)$ $p.p.$ 于 $[a, b]$．此即$x=y$．

(ii) $$\rho(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|dt$$

$$=\int_a^b |y(t)-x(t)|dt=\rho(y,x)．$$

(iii) 再取 $z(t)\in c[a, b]$，则有

$$\rho(x, y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|dt$$

$$\leqslant\int_a^b [|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|]dt$$

$$=\int_a^b |x(t)-z(t)|dt+\int_a^b |z(t)-y(t)|dt$$

$$=\rho(x, z)+\rho(z, y)．$$

从而证得 $c[a, b]$ 按距离（3）是一距离空间。

2° 再证上述距离空间不是完备的。为此，考虑$c[0,1]$。设 f_n如图6—1所示，不难看出，$\{f_n\}$ 按距离（3）是哥西序列，但它不收敛于 $c[a, b]$中任何函数。直观上可以看出，它收敛于$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$上的特征函数（它当然不在 $c[0, 1]$中）。

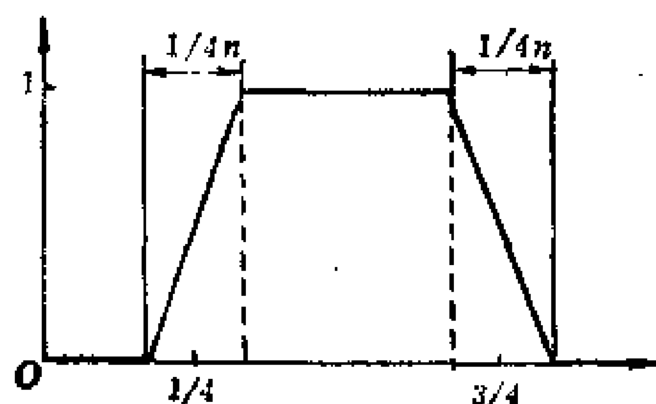


图 6—1

例 4 设m 是有界数列

$$x=\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$$

组成的集合。这就是说，对每一x，都有一个常数 k_x，使不等式 $|\xi_i|\leqslant k_x$对所有的i都成立。

设 $x=\{\xi_i\}$，$y=\{\eta_i\}\in m$，定义

$$\rho(x, y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i| \tag{4}$$

则m 按距离（4）是一距离空间，但不是可分的。

证明 1° 先证m是一距离空间。距离空间的条件（i）与（ii）是明显的，即

(i) $\rho(x, y)\geqslant 0$，$\rho(x, y)=0$当且仅当 $x=y$；

(ii) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$。

现在来证明满足三角不等式(iii)。设$z=\{\zeta_i\}\in m$。于是有

$$|\xi_i-\eta_i|\leqslant|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|$$

$$\leqslant \sup_i |\xi_i - \zeta_i| + \sup_i |\zeta_i - \eta_i|$$

$$= \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

因此

$$\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i| \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

此即证得m是一距离空间。

2° 证m是不可分的。取m的如下子集

$$m' = \{(\xi_i) | \xi_i = 0 \text{或} 1\}$$

这个集合的基数等于连续基数 c，因而是不可数的。任取 $x = \{\xi_i\}$，$y = \{\eta_i\} \in m'$，$x \neq y$，则

$$\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i| = 1$$

也就是说，m'含有不可数个元素且彼此的距离等于 1 。这样，我们就不难证明m是不可分的。事实上，假设m是可分的，则m中存在一个到处稠密的可数集合m_0。以m_0中每一个元素作一个以$\frac{1}{3}$为半径的邻域，这些邻域的全体构成整个空间m 的一个开复盖。因为这些邻域是一个可数集合，所以至少在其中一个邻域内含有上述不可数集合m'中两个不同的元素x，y。设这样一个邻域的中心是x_0，则 $x \in N\left(x_0, \frac{1}{3}\right)$，$y \in N\left(x_0, \frac{1}{3}\right)$。于是

$$1 = \rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

这显然不可能，从而证明了m是不可分的。

例 5 设 $\{\phi_k(x)\}$是L_2中一标准正交系，$f \in L_2$。 $a_1, a_2, \cdots, a_n$为n个实数。则下式

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k \right\|$$

当且仅当$a_k = (f, \phi_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$时取最小值。

证明 记 $c_k = (f, \phi_k)$。由于

$$\left(f-\sum_{k=1}^{n}c_k\phi_k,\ \phi_j\right)=(f,\ \phi_j)-c_j=0\quad(j=1,2,\cdots n)$$

于是

$$f-\sum_{k=1}^{n}c_k\phi_k$$

与 ϕ_j ($j=1$, 2, $\cdots$, n) 直交，从而与 ϕ_j ($j=1$, 2, $\cdots$, n) 的任意线性组合直交。因此

$$\begin{aligned}\left\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\phi_k\right\|^2&=\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\phi_k+\sum_{k=1}^{n}(c_k-\alpha_k)\phi_k\right\|^2\\&=\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\phi_k\right\|^2+\left\|\sum_{k=1}^{n}(c_k-\alpha_k)\phi_k\right\|^2\\&=\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\phi_k\right\|^2+\sum_{k=1}^{n}|c_k-\alpha_k|^2\end{aligned}$$

故当且仅当 $\alpha_k=c_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 时，$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\phi_k\right\|$ 达到最小值 $\left\|f-\sum_{k=1}^{n}c_k\phi_k\right\|$。

例 6 设 $\{\psi_k(x)\}$ 是一完全的标准正交系。若 $\{\phi_k(x)\}$ 是 L_2 中满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b[\psi_k(x)-\varphi_k(x)]^2dx<1$$

的标准正交系，则 $\{\phi_k(x)\}$ 也是完全的。

证明 为证 $\{\phi_k(x)\}$ 是完全的，只需证明，与所有 ϕ_k 都正交的函数必是零函数。即设 $\varphi\in L_2$，且 $(\varphi,\varphi_k)=0$ ($k=1$, 2, $\cdots$)。往证 $\varphi=0$。

由于

$$(\varphi, w_k) = (\varphi, \varphi_k) + (\varphi, w_k - \varphi_k) = (\varphi, w_k - \varphi_k)$$

于是有

$$|(\varphi, w_k)|^2 = |(\varphi, w_k - \varphi_k)|^2 \leqslant \|\varphi\|^2 \cdot \|w_k - \varphi_k\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, w_k)|^2 \leqslant \|\varphi\|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|w_k - \varphi_k\|^2$$

若 $\varphi \neq 0$，则 $\|\varphi\|^2 > 0$，由题设

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, w_k)|^2 \leqslant \|\varphi\|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|w_k - \varphi_k\|^2$$

$$= \|\varphi\|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b [w_k(x) - \varphi_k(x)]^2 dx$$

$$< \|\varphi\|^2$$

而$\{w_k\}$为完全系，从而也是封闭系，因此有

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, w_k)|^2$$

于是

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, w_k)|^2 < \|\varphi\|^2$$

这不可能，所以必须$\varphi = 0$。此即证得$\{\varphi_k\}$是完全的。

例 7 试证黎曼——勒贝格引理：设 $f \in L_2[-\pi, \pi]$。则有

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0$$

证明 由§5定理 4 知，三角函数系

$$\Gamma: \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots$$

是$L_2[-\pi,\pi]$中完全标准正交系。由贝塞尔不等式知，对任一标准正交系$\{\varphi_k\}$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f,\varphi_k)|^2\leqslant\|f\|^2$$

可见 f 关于标准正交系 $\{\varphi_k\}$ 的付立叶系数的一般项收敛于零。把这一事实应用于三角函数系T，便得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0$$

完全类似地还可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$$

从例 7 可见，函数列$\{\cos nx\}$与$\{\sin nx\}$在$L_2[-\pi,\pi]$中皆弱收敛于0。

第三部分　实变函数论习题解答

第一章　集合习题解答

§1　习题解答

1　（1）左$\subseteq$右　显然对每个$A_i=(0,i)\ (i=1,2,\cdots)$，恒有 $A_i\subseteq(0,\infty)$，从而由定理3知$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\subseteq(0,\infty)$。

左$\supseteq$右　设$x\in(0,\infty)$，即 $0<x<\infty$，于是有自然数k，使$0<x\leqslant k$，即$x\in(0,k]=A_k\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，得证 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\supseteq(0,\infty)$。

（2）左$\subseteq$右　设 $x\notin(0,1]$，即$x\leqslant 0$或$x>1$。若$x\leqslant 0$，显然 $x\notin\bigcap A_i$；若$x>1$，则 $x\notin(0,1]=A_1$，故$x\notin\bigcap A_i$，总之若 $x\notin(0,1]$，必有$x\notin\bigcap A_i$。

左$\supseteq$右　因对任意 $i\in N$，恒有 $A_i=(0,i]\supseteq(0,1]$，于是由定理3知 $\bigcap A_i\supseteq(0,1]$。

2（1）左$\subseteq$右　显然对任意$n\in N$，恒有$\left(\frac{1}{n},1\right)\subseteq(0,1)$，从而由定理3知$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right)\subseteq(0,1)$。

左$\supseteq$右　设 $x\in(0,1)$，即 $0<x<1$，从而存在 n_0

使$\frac{1}{n_0}< x<1$，即 $x\in\left(\frac{1}{n_0},1\right)$，于是有$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right)\supseteq(0,\ 1)$.

（2）左⊆右　设 $x\notin\{1\}$，即 $x\neq1$，若$x<1$，则有n_0使

$x<1-\frac{1}{n_0}$，故$x\notin\left(1-\frac{1}{n_0},1+\frac{1}{n_0}\right)$，从而$x\notin\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$.

左⊇右　因对任意　$n\in N$，　恒有 $1-\frac{1}{n}<1<1+\frac{1}{n}$，即

$1\in\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)(n=1,2,\cdots)$，故有$\bigcap\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\supseteq\{1\}$.

3　证法一　左⊆右　因 $A\subseteq A\cup B$，　$A\subseteq A\cup C$，从而 $A\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$；又因$B\cap C\subseteq B\subseteq A\cup B$，$B\cap C\subseteq C\subseteq A\cup C$，同理有 $B\cap C\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$，　于是有　$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

左⊇右　设 $p\notin A\cup(B\cap C)$，即 $p\notin A$且 $p\notin(B\cap C)$，从而 $p\notin A$且 "$p\notin B$或 $p\notin C$"，即"$p\notin A$且 $p\notin B$" 或 "$p\notin A$ 且 $p\notin C$"，亦即 $p\notin A\cup B$或 $p\notin A\cup C$，故 $p\notin(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证法二　由定理2之（5）有

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(A\cup C)&=[(A\cup B)\cap A]\cup[(A\cup B)\cap C]\\&=A\cup[(A\cap C)\cup(B\cap C)]\\&=A\cup(B\cap C).\end{aligned}$$

例，令$A=\{1,2\}$，$B=\{2,\ 3\}$，$C=\{3,4\}$，$D=\{1,2,3\}$. 则

$$(A\cap C)\cup(B\cap D)=\phi\cup\{2,3\}=\{2,3\}.$$

$$(A\cup B)\cap(C\cup D)=\{1,2,3\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,2,3\}.$$

4　必要性　反证。假设存在 $p_0\in B$ 但 $p_0\notin A$，从而有 $p_0\in(A-B)\cup B$，但 $p_0\notin A$，故 $(A-B)\cup B\neq A$，矛盾。

充分性　设 $A\supseteq B$，于是有 $A\supseteq(A-B)\cup B$。另一方面，设 $p\in A$，若 $p\notin B$，则 $p\in(A-B)\subseteq(A-B)\cup B$；若 $p\in B$，则 $p\in(A-B)\cup B$。总之有 $A\subseteq(A-B)\cup B$。综上得证 $A=(A-B)\cup B$。

5（1）左⊆右　设 $p\in S$，若 $p\notin B$ 则 $p\in\mathscr{C}_S B$，从而 $p\in\mathscr{C}_S A$（因 $A\subseteq B$ 故 $\mathscr{C}A\supseteq\mathscr{C}B$），于是有 $p\in B\cup\mathscr{C}_S A$；若 $p\in B$，则 $p\in B\cup\mathscr{C}_S A$。

左⊇右　显然 $S\supseteq B$，$S\supseteq\mathscr{C}_S A$，故 $S\supseteq B\cup\mathscr{C}_S A$。

（2）由定理4知有

$$(T\cap E)\cup(T\cap\mathscr{C}E)=T\cap(E\cup\mathscr{C}E)=T;$$

$$(E\cap T)\cup(E\cap\mathscr{C}T)=E\cap(T\cup\mathscr{C}T)=E.$$

6（1）左⊆右　因对任意 $k\in N$，恒有 $(A_k\cup B_k)\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)$，从而有 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)$。

左⊇右　设 $p\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)$，即对任意 n 恒有 $p\notin A_n\cup B_n$，即对任意 n 恒有 $p\notin A_n$ 且 $p\notin B_n$，即 $p\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 且 $p\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$，故 $p\notin\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)$。

（2）因对任意 $k\in N$，恒有 $A_k\cap B_k\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap$

$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$，故有$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$.

（3）参看定理4.

7　左⊆右　设 $x_0 \in \{x \mid x>0\}$，即 $x_0>0$，从而有$n_0 \in N$，使$x_0 > \frac{1}{n_0}$，即 $x_0 \in \left\{x \mid x > \frac{1}{n_0}\right\}$，所以有$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid x > \frac{1}{n}\right\}$.

左⊇右　设$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid x > \frac{1}{n}\right\}$，　则存在　$n_0 \in N$，　使 $x_0 \in \left\{x \mid x > \frac{1}{n_0}\right\}$，即$x_0 > \frac{1}{n_0} > 0$，从而 $x_0 \in \{x \mid x>0\}$.

8　左⊆右　设 $x_0 \in \{x \mid f(x)=a\}$，即 $f(x_0)=a$，于是对任意 $m \in N$，恒有$a \leqslant f(x_0) < a+\frac{1}{m}$，即恒有$x_0 \in \left\{x \mid a \leqslant f(x_0) < a+\frac{1}{m}\right\}$. 从而有$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid a \leqslant f(x) < a+\frac{1}{n}\right\}$.

左⊇右　设 $x_0 \notin \{x \mid f(x)=a\}$. 若$f(x_0)>a$，则存在$n_0 \in N$使 $f(x_0) \geqslant a+\frac{1}{n_0}$，　从而　$x_0 \notin \left\{x \mid a \leqslant f(x) < a+\frac{1}{n_0}\right\}$，故 $x_0 \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid a \leqslant f(x) < a+\frac{1}{n}\right\}$. 若　$f(x_0)<a$，　显然对任意 $m \in N$，恒有$x_0 \notin \left\{x \mid a \leqslant f(x) < a+\frac{1}{m}\right\}$，故 $x_0 \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid a \leqslant f(x) < a+\frac{1}{n}\right\}$.

9（1）$G-(E_1 \cap E_2) = G \cap \mathscr{C}(E_1 \cap E_2)$

$= G \cap (\mathscr{C}E_1 \cup \mathscr{C}E_2) = (G \cap \mathscr{C}E_1) \cup (G \cap \mathscr{C}E_2)$

$$= (G - E_1) \cup (G - E_2).$$

(2) $G - (E_1 \cup E_2) = G \cap \mathscr{C}(E_1 \cup E_2) = G \cap (\mathscr{C}E_1 \cap \mathscr{C}E_2)$

$$= (G \cap \mathscr{C}E_1) \cap (G \cap \mathscr{C}E_2) = (G - E_1) \cap (G - E_2).$$

10　因$E_1 \subseteq G$，于是有

$$G - [(E_1 \cap E_2) \cup (G - E_1)]$$
$$= G \cap \mathscr{C}([E_1 \cup (G - E_1)] \cap [E_2 \cup (G - E_1)])$$
$$= G \cap \mathscr{C}(G \cap [E_2 \cup (G \cap \mathscr{C}E_1)])$$
$$= G \cap \mathscr{C}((G \cap E_2) \cup (G \cap \mathscr{C}E_1))$$
$$= G \cap \mathscr{C}(G \cap (E_2 \cup \mathscr{C}E_1))$$
$$= G \cap (\mathscr{C}G \cup \mathscr{C}[E_2 \cup \mathscr{C}E_1])$$
$$= G \cap [\mathscr{C}E_2 \cap E_1] = E_1 \cap \mathscr{C}E_2 = E_1 - E_2.$$

§2　习题解答

1　证　显然 $\varphi: (0, 1) \longrightarrow (a, b)$,

$$x \longmapsto \varphi(x) = a + (b - a)x,$$
$$h: (0, 1) \longrightarrow (0, \infty),$$
$$x \longmapsto h(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$$

都是双射。

2　证　因 $\varphi: (-1, 1) \longrightarrow (-\infty, \infty), x \longmapsto \varphi(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$ 是双射。

3　证　将(0,1)中的全部有理数排列为

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots.$$

而[0,1]中全部有理数可排列为

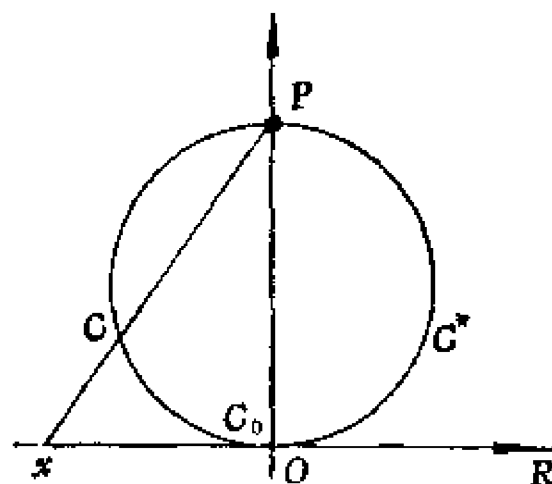
$$0, 1, r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots.$$

作从(0,1)到[0,1]的映射

$$\varphi: (0,1)\longrightarrow[0,1], x\longmapsto\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{当}x=r_1,\\ 1 & \text{当}x=r_2,\\ r_{n-2} & \text{当}x=r_n(n>2),\\ x & \text{当}x\text{是}(0,1)\text{中无理数时。}\end{cases}$$

显然φ是双射。

4　**证**　用C表示圆周，$p\in C$，令$C^*=C-\{p\}$。只须构造从C^*到R的一个双射，为此如图1—4所示作法显然可得映射



习题4

$\varphi: C^*\longrightarrow R, C\longmapsto\varphi(C)=x$是双射。故$C^*\sim R$。

5　**解**　用P_0表示在球面上挖去的那一点，M_0表示球面上与P_0相对的点。作一平面与球面切于点M_0。通过点P_0和球面上任意一点M引直线。该直线同平面交于点N，并将N与点M对应。球面上的点M同平面上的点N之间的这个对应是一一到上的。故挖去一点的球面与平面是对等的。

§3　习题解答

1　**解**　设Q^2与Q^3分别表示平面上和三维空间中坐标为有理数的点组成的集合。因有理数集可列，所以Q^2中的元素可以用由两个自然数组成的（有序）数组来标号，同理Q^3中的元素可用三个自然数组成的（有序）数组来标号，于是由§3的定理7知Q^2和Q^3都是可列集。

2　**解**　设$\mathscr{U}=\{(a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha\in D}$是直线上互不相交的开区间

族，对任意$\alpha\in D$，取有理数$r_\alpha\in(a_\alpha,b_\alpha)$，令$Q^*=\{r_\alpha\}_{\alpha\in D}$。因$u$中的开区间互不相交，所以对任意$(a_\alpha, b_\alpha)$，$(a_\beta, b_\beta)\in u$，当$(a_\alpha, b_\alpha)\neq(a_\beta, b_\beta)$时，显然必有$r_\alpha\neq r_\beta$，故映射

$$\varphi:\ u\longrightarrow Q^*,\quad (a_\alpha,\ b_\alpha)\longmapsto\varphi[(a_\alpha,\ b_\alpha)]=r_\alpha$$

是双射，即$u\sim Q^*$。因Q^*是有理数集的子集，故Q^*是至多可列的，从而u是至多可列的。

3 证 不妨设函数

$$y=f(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

为单调增加函数，其间断点组成的集记为E。

对任意x_1，$x_2\in E$，$x_1\neq x_2$，不妨设$x_1<x_2$，于是有

$$f(x_1-0)<f(x_1+0)\leqslant f(x_2-0)<f(x_2+0)$$

令

$$\Delta_{x_1}=(f(x_1-0),f(x_1+0)),\quad \Delta_{x_2}=(f(x_2-0),f(x_2+0))$$

则$\Delta_{x_1}\cap\Delta_{x_2}=\phi$。从而间断点集$E$与互不相交的一个开区间族对等。于是由题2知$E$是至多可列集。

4 证 因有理数集是可列集，故有理点为心，有理数为半径的开区间，可用由两个自然数组成的（有序）数组来标号，故由§3定理7知，上述的开区间族是可列的。

5 证 把全部有理点排列为

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots$$

对每个$r_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$及所有的有理点$r>r_n$，显然开区间族

$$E_n=\{(r_n,\ r)\mid r_n<r\}$$

都是可列的。所以有理点为端点的开区间族是可列个可列族的并族，于是由§3推论5知$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$是可列集。

6 证 因A是可列集，故A的元素可排列为

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

对任一n，由补充例题5知$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$的所有子集只有有限个，记为

$$B_n=\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{k(n)}\}$$

令n取遍所有正整数，则$B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ 就是A的一切有限子集组成的族。因可列个有限族的并仍为可列族，故B是可列的。

7　证　对任一自然数n，由定理7知，所有有理系数的n次多项式组成一可列集，于是由推论5知，所有系数为有理数的多项式组成的集合是可列集。

§4　习题解答

1　证　设所有无理数组成的集为E，有理数集为Q，显然E是无限集而Q是可列集，于是由§4定理2知有

$$\bar{\bar{E}}=\overline{\overline{E\cup Q}}=\overline{\overline{(-\infty,\infty)}}=c.$$

2　证　由§3定理7知整系数多项式的集合是可列的，而每个整系数多项式仅有有限个根，故A是可列个有限集的并集（自然数显然都是代数数），所以A是可列集，即$\bar{\bar{A}}=a$；另外，类似题1证法可知$\bar{\bar{B}}=c$。

3　证　由§3定理1知，任意无限集必含有可列子集，所以只须对可列无限集证明即可。

设可列无限集为

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\}$$

作A的子集如下：

$$A_1=\{a_n \mid n=2(2t-1),\ t=1,\ 2,\ \cdots\}$$

$$A_2=\{a_n \mid n=2^2(2t-1),\ t=1,\ 2,\ \cdots\}$$

………………………………………………

$$A_k=\{a_n \mid n=2^k(2t-1),\ t=1,\ 2,\ \cdots\}$$

………………………………………………

显然A_k $(k=1,2,\cdots)$是A的真子集，且各A_k 是互不相交的．事实上，若不然，则存在$k_1\neq k_2$，使 $A_{k_1}\cap A_{k_2}\neq\phi$．于是必有$t_1$，$t_2$使得

$$2^{k_1}(2t_1-1)=2^{k_2}(2t_2-1)\quad(k_1\neq k_2)$$

不妨设 $k_2>k_1$，有

$$2t_1-1=2^{k_2-k_1}(2t_2-1)$$

这显然是不可能的，从而 $\{A_k\}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$是A 的可列个互不相交的无限真子集。

4　证　M表示$[0,1]$的所有子集组成的族，E表示$[0,1]$所有子集的特征函数的族．于是有$\overline{\overline{F}}\geqslant\overline{\overline{E}}$ $(F\supseteq E)$，且由§2例 5 知$\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{M}}$．从而由§4定理 7 得知

$$\overline{\overline{F}}\geqslant\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{M}}>\overline{\overline{[0,\ 1]}}=c_\circ$$

5　证　反证．若不然，$\overline{\overline{B}}<c$，$\overline{\overline{C}}<c$．则可推出矛盾．

由于$\overline{\overline{A}}=c$．必存在$A$到$R^2$上的一一对应$\varphi$，使$\varphi(A)=R^2$．即对任意$a\in A$，有

$$\varphi(a)=(x,\ y)\in R^2$$

与之对应。

若记$\varphi(B)=U$，$\varphi(C)=V$．有

$$R^2=\varphi(A)=\varphi(B)\cup\varphi(C)=U\cup V$$

且$\overline{\overline{U}}=\overline{\overline{B}}<c$，$\overline{\overline{V}}=\overline{\overline{C}}<c$．

设P_x是R^2中点到x轴X的投影，P_y是R^2中点到 y 轴Y的投

影。即

$$P_x(x,\ y)=(x,\ 0),\quad P_y(x,\ y)=(0,\ y)$$

记 $\qquad P_x(U)=U_x,\ P_y(V)=V_y$

有 $\qquad \overline{\overline{U_x}}\leqslant\overline{\overline{U}}<c,\overline{\overline{V_y}}\leqslant\overline{\overline{V}}<c$

而 $\qquad \overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}=c$，所以 U_x，V_y 分别为X、Y的真子集．即存在x^*，使 $(x^*,\ 0)\overline{\in}U_x$，存在 y^*使 $(0,\ y^*)\overline{\in}V_y$．从而对任意$y$，$(x^*,\ y)\overline{\in}U$，对任意 x，$(x,\ y^*)\overline{\in}V$。这使得

$$(x^*,\ y^*)\overline{\in}U\cup V=R^2$$

得出矛盾．

6 **证** 记E为右方连续的单调函数全体．任取$f(x)\in E$，作

$$E_1=\{f(x)+c_1\mid c_1\text{取一切实数}\}$$

显然$\overline{\overline{E_1}}=c$。而$E_1\subseteq E$．所以$\overline{\overline{E}}\geqslant c$。

另一方面，对任意 $f(x)\in E$，对应有 $f(x)$ 在有理点上的函数数值集合：

$$a_f=(f(r_1),\ f(r_2),\ \cdots,\ f(r_n),\ \cdots)$$

由 $f(x)$的右连续性，$f(x)$在无理点上的值，完全由a_f所决定．从而 a_f 完全决定 $f(x)$，E与 $\{a_f\mid f(x)\in E\}$ 对等．而 $\{a_f\mid f(x)\in E\}$ 是实数列全体的子集．实数列全体的基数为 c。则$\{a_f\mid f(x)\ \in E\}$ 的基数小于等于 c。从而知$\overline{\overline{E}}\leqslant c$．综上证得$\overline{\overline{E}}=c$。

第二章　点集习题解答

§1　习 题 解 答

1　解　① $E'=[0,\ 1]$. $E^\circ=\phi$. $\bar{E}=E\cup E'=[0,\ 1]$.

② $E'=R^1$, $E^\circ=\phi$, $\bar{E}=E\cup E'=R^1$.

③　显然 $y=f(x)$ 在$x\neq0$处皆是连续的，故首先可知E中除点（0，0）外，其余点皆属于E'；另外，因 $y=f(x)$ 在$x=0$邻近无限次振动，故 y 轴上闭区间$[-1,1]$的所有点显然也都属于E'. 综上可知

$$E'=E\cup\{(0,\ y)\mid -1\leqslant y\leqslant1\}$$

而 $E^\circ=\phi$. $\bar{E}=E\cup E'=E'$.

④　$E'=\left\{\left(\frac{1}{m},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{n}\right)\cup(0,0)\mid m,\ n\text{为任意自然数}\right\}$.

$$E^\circ=\phi.\ \bar{E}=E\cup E'$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right\}\cup\left\{\left(\frac{1}{m},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{n}\right)\cup(0,0)\right\},$$

其中的 m, n为任意自然数.

⑤这里的E与§1例 6 中的E虽是同一点集，但它们所在的空间是不同的。在R^3中的邻域是开球，显然E不能包含任意开球，故有 $E^\circ=\phi$.

$$E'=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqslant1,\ z=0\}$$

$$\bar{E}=E\cup E'=\{(x,\ y,\ z)\ |\ x^2+y^2\leqslant 1,\ z=0\}$$

值得注意的是，这里的内域E°与§1例 6 的结果不同.

2　**解**　等式不恒成立. 例如：设A为$[0,\ 1]$内全部有理数，B为$[0,1]$内全部无理数，则 $A'=B'=[0,1]$, 故$A'\cap B'=[0,\ 1]$, 但 $(A\cap B)'=\phi'=\phi$.

3　**证**　左$\subseteq$右　因为 $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$, 故有$(A\cap B)^\circ\subseteq A^\circ$, $(A\cap B)^\circ\subseteq B^\circ$, 从而有$(A\cap B)^\circ\subseteq A^\circ\cap B^\circ$.

左$\supseteq$右　设 $x_0\in A^\circ\cap B^\circ$, 故有 $\delta>0$, 使 $N(x_0,\ \delta)\subseteq A$且$N(x_0,\ \delta)\subseteq B$. 从而 $N(x_0,\ \delta)\subseteq A\cap B$, 即$x_0$是$A\cap B$ 的内点，则有 $(A\cap B)^\circ\supseteq A^\circ\cap B^\circ$.

综上证得 $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$.

4　**解**　等式不恒成立. 例如：设

$A=\{[0,1]$中无理数$\}$　$B=\{[0,1]$中有理数$\}$

则 $(A\cup B)^\circ=(0,\ 1)$; $A^\circ=\phi$, $B^\circ=\phi$, 因此 $A^\circ\cup B^\circ=\phi$. 从而得到 $(A\cup B)^\circ\neq A^\circ\cup B^\circ$.

5　**解**　不一定. 例如：设 $A=\{(0,2)$中无理数$\}$, $B=[0,\ 1]$.

显然 $A^\circ=\phi$, $B^\circ=(0,\ 1)$ 故 $A^\circ\subseteq B^\circ$.

但 $A'=[0,\ 2]$, $B'=[0,\ 1]$ 则$A'\supsetneqq B'$.

6　**解**　例如$A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\right\}$, 则$A'=\{0\}$非空.

7　**解**　例如取 $A=[-1,\ 0]$, $B=(0,1)$则$A\cap B=\phi$, 故$\bar{A}\cap\bar{B}=\phi$. 而$\bar{B}=[0,1]$, 故$A\cap\bar{B}=\{0\}$, 则$A\cap\bar{B}$就不被 $\overline{A\cap B}$ 包含.

8　**解**　例如取 $A=\{[0,\ 1]$ 中无理数$\}$

$B=\{[0,\ 1]$ 中有理数$\}$

则$\bar{A}=[0,\ 1]$, $\bar{B}=[0,\ 1]$, 而 $\bar{A}\cap B=B$, $A\cap\bar{B}=A$, $\bar{A}\cap\bar{B}$

$=[0,1]$, $A\cap B=\phi$.

§2 习题解答

1 证 充分性 由$E\cup E'=\bar{E}=E$，得$E'\subseteq E$，从而E为闭集.

必要性 已知 $E'\subseteq E$，因 $E\subseteq E$，故 $\bar{E}=E\cup E'\subseteq E$，但$\bar{E}\supseteq E$，故得$\bar{E}=E$.

2 证 充分性 只须证 $E'\subseteq E$. 设 $p_0\in E'$，由§1定理3知E中有互异点列 $\{p_n\}$，使 $p_n\to p_0$ $(n\to\infty)$，于是由已知条件有 $p_0\in E$，得证 $E'\subseteq E$.

必要性 因E为闭集，故 $E'\subseteq E$. 设$\{p_n\}$ 是E中收敛点列，且 $p_n\to p_0$ $(n\to\infty)$.

若 $\{p_n\}$ 是互异点列，则由§1定理3 知，$p_0\in E'\subseteq E$；若$\{p_n\}$不是互异点列，则显然有 $p_0\in\{p_n\}\subseteq E$. 总之有 $p_0\in E$.

3 证 设G是开集，F是闭集. 因

$$G-F=G\cap(\mathscr{C}F),\quad F-G=F\cap(\mathscr{C}G)$$

而$\mathscr{C}F$是开集，$\mathscr{C}G$是闭集，故$G-F$是开集，$F-G$是闭集.

4 解 诸点集E既不是开集，也不是闭集，更不是完备集，但除④外都是自密集.

5 解 ①两个完备集的交集未必是完备集. 例如：设R^1中的二闭区间 $A=[1,2]$，$B=[2,3]$，则A与B都是R^1中的完备集，但是$A\cap B=\{2\}$却不是R^1中的完备集. 因为 $\{2\}'=\phi$，从而

$$A\cap B=\{2\}\neq\{2\}'=(A\cap B)'.$$

② 有限个完备集的并集恒为完备集. 事实上，设 A_1，

$A_2, \cdots, A_n$都是R^n中的完备集，令$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，今证 $A=A'$。

因每个A_i都是闭集，故A是闭集，从而$A'\subseteq A$。

另一方面，设$p\in A$，则有$1\leqslant i_0\leqslant n$，使 $p\in A_{i_0}$，因A_{i_0}是完备集，故 $A_{i_0}=A'_{i_0}$，从而 $p\in A'_{i_0}$。但 $A_{i_0}\subseteq A$，于是由§1定理 4 导集的单调性知 $p\in A'$，得证 $A'\supseteq A$。综上证得$A'=A$。

③ 可列个完备集的并集未必是完备集。例如：R^1中闭区间是完备集，但

$$\left[1,1\frac{1}{2}\right]\cup\left[1\frac{1}{2},1\frac{3}{4}\right]\cup\left[1\frac{3}{4},1\frac{7}{8}\right]\cup\cdots$$

$$\cup\left[2-\frac{1}{2^n},2-\frac{1}{2^{n+1}}\right]\cup\cdots$$

是半开区间[1, 2)，已不是闭集，当然更不是完备集了。

6 证 若 $x\in A\cap\bar{B}$，往证$x\in\overline{A\cap B}$。

若 $x\in A\cap\bar{B}$，则$x\in A$且$x\in\bar{B}$，即$x\in A$且$x\in B$或$x\in B'$。故 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in A$ 且 $x\in B'$。

若$x\in A$且$x\in B$，即$x\in A\cap B$，从而$x\in\overline{A\cap B}$。

若$x\in A$且$x\in B'$，往证$x\in(A\cap B)'$。

任取x的邻域 $N(x, \delta)$，因A是开集，则有 $N(x, \varepsilon)$，使$N(x, \varepsilon)\subseteq A$且$N(x, \varepsilon)\subseteq N(x, \delta)$。因 $x\in B'$，于是在$N(x, \varepsilon)$中必有B中无穷多个点。所以 $N(x, \varepsilon)$中必有$A\cap B$的无穷多个点。而 $N(x, \varepsilon)\subseteq N(x, \delta)$，故$N(x, \delta)$中亦有$A\cap B$中的无穷多个点。即证得 $x\in(A\cap B)'$，从而有$x\in\overline{A\cap B}$。综上证得 $A\cap\bar{B}\subseteq\overline{A\cap B}$。

§3 习题解答

1 **证** 假设E为无限集，又由条件知E是有界集，于是由波尔察诺——维尔斯特拉斯定理知，E必有聚点，这与$E'=\phi$矛盾，故E必为有限集。

2 **证** 已知$E'=\phi$，即E没有聚点，从而对任一$p\in E$，必存在点p的某个邻域$N(p,\ \delta_p)$，使

$$N(p,\ \delta_p)\cap E=\{p\} \tag{1}$$

对E中每一点p，皆取p的一个邻域$N(p,\ \delta_p)$使其合于式（1）．显然所有这样的邻域组成的邻域（开集）族$\{N(p,\ \delta_p)\}_{p\in E}$是$E$的一个覆盖，于是由林得略夫定理知，$\{N(p,\ \delta_p)\}_{p\in E}$中必有至多可列个邻域也覆盖$E$，由这些邻域的取法知，这至多可列个邻域与$E$中的点是一一对应的，故$E$是至多可列点集。

3 **证法一** 假设E没有聚点，即$E'=\phi$，于是由题2知E是至多可列的，这与已知条件矛盾，故E必至少有一个聚点。

证法二 设E为不可列集．于自然数n，作$G_n=\{x\,|\rho(x,O)<n\}$，则$R^n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，所以

$$E=E\cap R^n=E\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap G_n)$$

由E的不可列性知$\{E\cap G_n\}$中至少有某一个集$E\cap G_k$是无限集．显然$E\cap G_k\subseteq G_k$，故$E\cap G_k$是有界无限点集，由波尔察诺——维尔斯特拉斯定理$E\cap G_k$至少有一个聚点x_0，从而x_0也必是E的聚点。

4　证　设E为有界无限集，往证E必有聚点。

假设E没有聚点，于是结合条件知E是有界闭集。

因E无聚点，故对每一点$p\in E$，p必有一邻域$N(p,\ \delta_p)$，使$N(p,\ \delta_p)$只含E的有限多个点。显然用这样的邻域组成的邻域族$\{N(p,\ \delta_p)\}_{p\in E}$是$E$的一个覆盖，因$E$是有界闭集，故由海恩——波雷尔有限覆盖定理知$\{N(p,\ \delta_p)\}_{p\in E}$中必有有限个邻域覆盖$E$，于是由上述邻域的取法知$E$是有限集，这与已知条件矛盾。故$E$必有聚点。

5　证　设F为R^n中闭集，对每个自然数n，做集

$$G_n=\left\{p\mid \rho(p,\ F)<\frac{1}{n}\right\}$$

则由§3定理5知，

$$F\subseteq G_n,\ G_n\text{是开集}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

于是有$F\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$。今证$F\supseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$。设$p\in\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$，则对每个$n$，皆有$p\in G_n$，即对每个$n$皆有$0\leqslant\rho(p,\ F)<\frac{1}{n}$，从而有$\rho(p,F)=0$，故$p\in\bar{F}$。但$F$是闭集，即$F=\bar{F}$，于是有$p\in F$。综上证得$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$。

设G为R^n中开集，则$\mathscr{C}G$为R^n中闭集，由前面的证明知有可列开集族$\{G_n\}_{n\in N}$，使

$$\mathscr{C}G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$$

于是有

$$G=\mathscr{C}(\mathscr{C}G)=\mathscr{C}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}G_n$$

因$\mathscr{C}G_n$ $(n=1, 2, \cdots)$皆为闭集，于是得证。

6 证 先证 $A\supseteq M$. 设 $x'\in M$，因 $\rho(x', x')=0$，从而 $\rho(x', M)=0$，即$x'\in A$.

次证A是闭集。往证 $A'\subseteq A$. 即只须证任取 $x\in A'$，必有 $\rho(x, M)=0$.

设x_0是A的任一聚点，则在A中必有异于x_0而收敛于 x_0 的序列$\{x_n\}$. 即 $\rho(x_n, x_0)\to 0$ $(n\to\infty, x_n\in A)$. 由点到集合距离的定义知 $\rho(x_0, M)\leqslant\rho(x_0, x_n)+\rho(x_n, M)$. 因为$x_n\in A$，所以 $\rho(x_n, M)=0$ $(n=1, 2, \cdots)$又 $\rho(x_n, x_0)\to 0(n\to\infty)$，所以 $\rho(x_0, M)=0$，故$x_0\in A$. 综上证得 $A'\subseteq A$.

7 证 设非空有界下降闭集列为：

$$F_1\supseteq F_2\supseteq F_3\supseteq\cdots\supseteq F_k\supseteq\cdots$$

往证$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k\neq\phi$.

从每个 F_k $(k=1, 2, \cdots)$中各选一个点x_k，则得到一个有界序列

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots \tag{1}$$

由波尔察诺——维尔斯特拉斯定理的推论1知（1）必有收敛于某点 x_0的子列$\{x_{k_i}\}$. 下面证明$x_0\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k$.

对任意F_k选出子列$\{x_{k_i}\}$的由 $k_i>k$ 的那些x_{k_i}所构成的子列，它亦必收敛于x_0，故x_0 是 F_k $(k=1, 2, \cdots)$的聚点。即$x_0\in F'_k$，因为 $F'_k\subseteq F_k$，所以 $x_0\in F'_k\subseteq F_k$ $(k=1, 2, \cdots)$. 从而$x_0\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k$. 即证得$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k\neq\phi$.

8 解 首先指出“有界”条件不可缺少。例如取 $F=$

$(-\infty, \infty)$，显然F是闭集．再取$\mu=\{(-n,n)\mid n=1,2,\cdots\}$．由 $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-n, n)$知$\mu$覆盖了$F$，因$\mu$中的任何有限个也不能覆盖$F$。

其次指出"闭集"条件不可缺少．例如取 $F=(0, 1)$，令 $\mu=\left\{\left(0,\frac{n-1}{n}\right)\middle| n=1, 2, \cdots\right\}$显然$F$不是闭集，而$\mu$盖住了$F$，但容易看出$\mu$中的任何有限个也不能覆盖$F$．

综上得知定理中的"有界"、"闭集"的条件是不可缺少的。

§4 习题解答

1 解 不一定．例如康托集是R^1中有界闭集，但它既不含有孤立点也不包含任何闭区间．

2 证 假设存在两个非空闭集F_1和F_2，使得$F_1\cap F_2=\phi$，且 $[a, b]=F_1\cup F_2$．于是 $\rho(F_1, F_2)=d>0$，且存在$x_1\in F_1$，$x_2\in F_2$，使

$$\rho(x_1, x_2)=\rho(F_1, F_2)=d>0$$

取$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，则$x_0\in[a, b]=F_1\cup F_2$，从而$x_0\in F_1$或$x_0\in F_2$．若 $x_0\in F_1$，则有

$$d=\rho(F_1,F_2)\leqslant\rho(x_0,F_2)\leqslant\rho(x_0,x_2)=\frac{d}{2}$$

这是不可能的。同理$x_0\in F_2$也是不可能的，故假设不成立。

3 证 设 $[a_1, b_1]$，$[a_2, b_2]$，$\cdots$，$[a_n, b_n]$，$\cdots$ 是任意

可列个互不相交的闭区间，今证$\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$不能填满全直线，

即$\mathscr{C}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right]\neq\phi$.

1° 考虑这些闭区间的内域的并集．令

$$E=C\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right]$$

则显然E是闭集，且非空（因为起码 a_1，b_1就都属于E）．

2° 因为E是由实直线去掉可列个互不相交且两两无公共端点的开区间（若上述二开区间有公共端点，则相应的二闭区间必相交，这与已识条件矛盾）而成，故E是没有孤立点的闭集，从而E是完备集，故其基数为c，但

$$\mathscr{C}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right]=E-\{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots\}$$

而 $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots\}$是可列集，所以 $\mathscr{C}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right]$ 的基数也是c，因此它是非空的，于是有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]\neq R^1.$$

4 证 设(α_1, β_1)是G_1的任一构成区间，又设$x\in(\alpha_1, \beta_1)$．则由 $G_1\subseteq G_2$ 得$x\in(\alpha_1, \beta_1)\subseteq G_1\subseteq G_2$．若$(\alpha_2, \beta_2)$是包含$x$的$G_2$的构成区间，则$(\alpha_2, \beta_2)$是包含 x 的开区间中的最大者，故必有$(\alpha_1, \beta_1)\subseteq(\alpha_2, \beta_2)$．

5 证 显然交集 $[a, b]\cap E$是闭集．故只须证明$[a, b]\cap E$ 不含孤立点．

设 $x_0\in[a, b]\cap E$. 因为 $a\notin E$, $b\notin E$, 则x_0是闭区间的内点. 作任意的邻域 $N(x_0, \delta)\subseteq[a, b]$. 在这个邻域内必有不同于$x_0$的点$x\in E$, 即有 $x\in[a, b]\cap E$, 因而, 在x_0的任意邻域内有异于x_0的点 $x\in[a, b]\cap E$, 这表明x_0必是 $[a, b]\cap E$的聚点, 而不是 $[a, b]\cap E$的孤立点. 由x_0的任意性证得$[a, b]\cap E$必不含孤立点.

综上证得 $[a, b]\cap E$ 必为完备集.

第三章　勒贝格测度习题解答

§1　习题解答

1　**证**　非负性是明显的．设

$$G=\bigcup_{i=1}^{K}(a_i,\ b_i)\quad (K:\text{有限或}\infty)$$

其中$(a_i,\ b_i)$是G的构成区间．

因G有界，故必存在区间$\langle a,\ b\rangle$，使 $G\subseteq\langle a,\ b\rangle$．又因$G$的构成区间两两不相交，故互不重叠，于是由引理1及推论1，有

$$mG=\sum_{i=1}^{K}m(a_i,b_i)\leqslant m\langle a,b\rangle=b-a<+\infty.$$

2　**解**　不可能等于零．

如果E含内点x_0，那末必有x_0的某一个邻域$N(x_0,\delta)\subseteq E$．而邻域$N(x_0,\ \delta)$的测度就是开区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$的长度，故为$2\delta>0$．所以$mE\geqslant mN(x_0,\ \delta)>0$．

3　**证**　用反证法．假设$E\cap\mathscr{C}A$是可测集，则由于

$$E=(E\cap A)\cup(E\cap\mathscr{C}A)$$

及$E\cap A$的可测性（因$E\cap A\subseteq A$且$mA=0$）知，E是可测集．这与假设E是不可测集矛盾，故$E\cap\mathscr{C}A$必是不可测集．

4　**解**　不一定含有区间．例如，在补充例题 4 中所构造的点集 $E\subseteq[0, 1]$，其测度 $mE=\frac{1}{2}>0$，但 E 不含有任何区间．

5　**证**　对 A 中点进行分类，x_1，$x_2\in A$，若 x_1-x_2 为有理数，则 x_1 与 x_2 属同一类．否则不属同一类．这样 A 中所有点被分为许多互不相交的类 $K(x_1)$，$K(x_2)$，…．在每一类中任选一个点作为代表，组成集合 B，$B\subseteq A$，且 B 为不可测集（参看主要参考文献〔3〕）．

若 A 中任二点 x，y 之差均不为有理数，即 A 中任二点必属不同类，亦即每类 $K(x)$ 只含一个点，$K(x)=\{x\}$．于是 $B=A$．而 B 不可测，此与 A 可测的假设相矛盾．因此，A 中至少有两点，其差为有理数．

6　**证**　取 $[a, b]\supseteq E$，定义函数

$$f(x)=m^*([a, x]\cap E)\quad (x\in[a, b])$$

显然 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上单调增加函数．

下面往证 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必连续．

任取 $x\in[a, b)$ 及任一正数 h（只要 $x+h\in[a, b]$），有

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=m^*([a,x+h]\cap E)-m^*([a,x]\cap E)\\&\leqslant m^*([a,x]\cap E)+m^*([x,x+h]\cap E)\\&\quad -m^*([a, x]\cap E)\\&=m^*([x,x+h]\cap E)\leqslant m[x, x+h]=h\end{aligned}$$

从而有 $\lim\limits_{h\to 0+} f(x+h)=f(x)$．

即知 $f(x)$ 在 x 处右连续．同理可证，对任一 $x\in(a,b]$，$f(x)$ 在 x 处左连续．综上得证 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续．

注意到 $f(a)=0$，$f(b)=p$，$f(a)<q<f(b)$，由介值定理，必存在 $\xi\in(a, b)$，使 $f(\xi)=q$．即

$$m^*([a, \xi] \cap E) = q$$

由此可见集合 $E_1 = [a, \xi] \cap E$ 即合所求。

§2 习 题 解 答

1 证 显然有 $m^* I \leqslant |I|$。现证 $m^* I \geqslant |I|$。

事实上，于任意正整数 m，由外测度定义知，有一列开长方体 $I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots$，使 $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < m^* I + \frac{1}{m}$$

从而有

$$|I| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < m^* I + \frac{1}{m}$$

令 $m \to \infty$，则有

$$m^* I \geqslant |I|$$

于是证得 $m^* I = |I|$。

2 证 先证 $m^* E > 0$。因为 I 是开长方体，所以 $|I| > 0$。由本节习题1知 $m^* I = |I|$。又 $E \supseteq I$，于是由外测度性质(Ⅱ)，有

$$m^* E \geqslant m^* I = |I| > 0$$

次证 $m_* E > 0$。设 $\varDelta$ 是包含 E 的长方体，则 $\varDelta \supseteq E \supseteq I$。从而有 $\varDelta \supsetneqq (\varDelta - I) \supseteq (\varDelta - E)$。由于 $\varDelta$ 和 I 都是长方体，于是必有

$$|\varDelta| > m^*(\varDelta - I) \geqslant m^*(\varDelta - E)$$

由内测度定义的注解①可知

$$m_*E = |\varDelta| - m^*(\varDelta - E)$$

故有 $m_*E > 0$。

3　证　因E可列，故可设

$$E = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n, \cdots\}$$

对任意$\varepsilon > 0$和每个 a_i $(i = 1,\ 2,\ \cdots)$，取包含 a_i的开区间 I_i，使$m^* I_i < \frac{\varepsilon}{2^i}$，则 $E \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$，且

$$0 \leqslant m^* E \leqslant m^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^* I_i < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

由于ε的任意性，则有$m^* E = 0$。

4　证　因为 $E_1 \subseteq (E_1 - E_2) \cup E_2$，所以由外测度性质(Ⅱ)和(Ⅲ)知

$$m^* E_1 \leqslant m^* [(E_1 - E_2) \cup E_2] \leqslant m^* (E_1 - E_2) + m^* E_2$$

故有

$$m^* (E_1 - E_2) \geqslant m^* E_1 - m^* E_2.$$

5　证　设E_1是[0，1]中的无理点集，E_2是有理点集．则[0，1] $= E_1 \cup E_2$，因E_2可列，故 $m^* E_2 = 0$，于是有

$$1 = m^* [0,\ 1] \leqslant m^* E_1 + m^* E_2 = m^* E_1$$

又因 $E_1 \subseteq [0,\ 1]$，故有

$$m^* E_1 \leqslant m^* [0,\ 1] = 1$$

综上得证 $m^* E_1 = 1$。

6　证　设E_i $(i = 1,\ 2,\ \cdots)$为可列个点集，且

$$m^* E_1 = m^* E_2 = \cdots = m^* E_n = \cdots = 0$$

令 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$，则由外测度性质(Ⅲ)知：

$$0 \leqslant m^* E = m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^* E_n = 0$$

故得 $\quad m^*E=0$。

7 证 因为 $B\subseteq A\cup B$，所以由外测度性质(Ⅰ)和(Ⅱ)，有

$$m^*B\leqslant m^*(A\cup B)\leqslant m^*A+m^*B$$

又因 $m^*A=0$，故有

$$m^*B\leqslant m^*(A\cup B)\leqslant m^*B$$

从而得

$$m^*B=m^*(A\cup B)。$$

8 证 因$m^*(E_1\setminus E_2)=0$，且$E_1\subseteq(E_1\setminus E_2)\cup E_2$，故有

$$m^*E_1\leqslant m^*(E_1\setminus E_2)+m^*E_2=m^*E_2$$

又因 $m^*(E_2\setminus E_1)=0$，且 $E_2\subseteq(E_2\setminus E_1)\cup E_1$，故有

$$m^*E_2\leqslant m^*(E_2\setminus E_1)+m^*E_1=m^*E_1$$

从而得

$$m^*E_1=m^*E_2 \tag{1}$$

因为 $E_1\cup E_2=(E_1\setminus E_2)\cup(E_2\setminus E_1)\cup(E_1\cap E_2)$，所以可得

$$m^*(E_1\cup E_2)\leqslant m^*(E_1\cap E_2)$$

另一方面，显然有 $m^*(E_1\cup E_2)\geqslant m^*(E_1\cap E_2)$。从而有

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1\cap E_2) \tag{2}$$

又因 $E_1\subseteq E_1\cup E_2$及式（2），则有

$$m^*E_1\leqslant m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1\cap E_2)\leqslant m^*E_1$$

再由式（1）就有

$$m^*E_1=m^*E_2=m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1\cap E_2)。$$

§3 习 题 解 答

1 证 不妨设E有界，则恒有 $0\leqslant m_*E\leqslant m^*E$，但$m^*E=0$，故有 $m_*E=m^*E=0$，由可测集定义知E可测，且 $mE=$

$m^*E=0$。

2 证 因为 $E_1\subseteq E$，所以 $0\leqslant m^*E_1\leqslant mE=0$，从而 $m^*E_1=0$，故由上述习题1知E_1可测，且 $mE_1=0$。

3 证 因 E_1，E_2 皆可测，则由§3推论1及推论2知，$E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2$皆可测。于是由指导部分之例2即得证。

4 证 令 $T=\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n}}E_i$，则 $T\cap S_i=E_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$。因 S_i $(i=1,2,\cdots,n)$皆可测，并且 $S_i\cap S_j=\phi$ $(i\neq j)$，则由§3推论1知

$$m^*\left(T\cap\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}}S_i\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}m^*(T\cap S_i)$$

但是 $T\cap\left(\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n}}S_i\right)=\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n}}E_i$，$m^*(T\cap S_i)=m^*E_i$，故有

$$m^*\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m^*E_i.$$

5 证 因 S_1，S_2皆可测，且 $S_1\supseteq S_2$，则 $(S_1-S_2)\cap S_2=\phi$，且S_1-S_2可测。于是由§3定理8知

$$mS_1=m[(S_1-S_2)\cup S_2]=m(S_1-S_2)+mS_2$$

又因 $mS_2<+\infty$，故

$$m(S_1-S_2)=mS_1-mS_2.$$

注：这里必须要求 $mS_2<+\infty$，否则作差 mS_1-mS_2 的运算是不允许的。

6 证 不妨假设E_1有界。令 $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n=\lim\limits_{n\to\infty}E_n$。现取开长方体 $\varDelta\supseteq E_1$，则 $\{\varDelta\setminus E_n\}$ 是增加集列：

$$\varDelta\setminus E_1\subseteq\varDelta\setminus E_2\subseteq\cdots\subseteq\varDelta\setminus E_n\subseteq\cdots$$

于是 $\Delta\setminus\lim\limits_{n\to\infty}E_n=\Delta\setminus\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n=\Delta\cap\mathscr{C}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)$

$$=\Delta\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}E_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\Delta\cap\mathscr{C}E_n)$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\Delta\setminus E_n)=\lim_{n\to\infty}(\Delta\setminus E_n)$$

从而有 $m^*(\Delta\setminus\lim\limits_{n\to\infty}E_n)=m^*(\lim\limits_{n\to\infty}(\Delta\setminus E_n))$ （1）

又因$\Delta\supseteq E_1\supseteq E$，则由内测度定义的注解可知

$m_*E=m\Delta-m^*(\Delta\setminus E)=m\Delta-m^*(\Delta\setminus\lim\limits_{n\to\infty}E_n)$

注意到式（1）及$\{\Delta\setminus E_n\}$是增加集列，从而由指导部分例3，便有

$$\begin{aligned}m_*E&=m\Delta-m^*(\Delta\setminus\lim_{n\to\infty}E_n)\\&=m\Delta-m^*(\lim_{n\to\infty}(\Delta\setminus E_n))\\&=m\Delta-\lim_{n\to\infty}m^*(\Delta\setminus E_n))\\&=\lim_{n\to\infty}[m\Delta-m^*(\Delta\setminus E_n)]\\&=\lim_{n\to\infty}m_*E_n\end{aligned}$$

从而证得 $m_*\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}m_*E_n$。

§4 习题解答

1 解 不一定。例如R^n中所有有理点组成的点集E，由§4推论3知 $mE=0$。

2 解 未必。例如本节习题1解中的例，E是R^n中有理

点集．显然是无界的，但 $mE=0$。

3　证　设 $E=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则 E 是闭集，故由推论 1 知 E 可测。

对任意 $\varepsilon>0$，对每个 a_i 取小开长方体 δ_i，使 $\{a_i\}\subseteq\delta_i$，且

$$m\delta_i=|\delta_i|<\frac{\varepsilon}{n}\quad i=1, 2, \cdots, n$$

于是有　$E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\delta_i$，且

$$0\leqslant mE\leqslant m\left(\bigcup_{i=1}^{n}\delta_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}m\delta_i<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性就有 $mE=0$。

4　证　设 $E=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$．由推论 2 知，每个 $\{a_n\}$ 都可测，且 $m\{a_n\}=0$。特别的，有 $\{a_i\}\cap\{a_j\}=\phi(i\neq j)$，

于是由§3定理 8 知 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{a_i\}$ 可测，且有

$$mE=m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{a_i\}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m\{a_i\}=0$$

5　证　只须证 E 是至多可列集．但此结果已于第二章§3习题 2 给出。

6　证　未必。设 E 是 R^n 中有理点所作成的集，则由§4推论 3 知 $mE=0$，但 E 是无界集．

7　证　必要性　设 E 可测，则由§4定理8，于任意 $\varepsilon>0$，有开集 $G\supseteq E$，使

$$m^*(G-E)<\frac{\varepsilon}{2}$$

由定理 9，有闭集 $F\subseteq E$，使

$$m^*(E-F)<\frac{\varepsilon}{2}$$

显然 $F\subseteq E\subseteq G$，且$G-F$可测，又因

$$G-F=(G-E)\cup(E-F)$$

从而

$$m(G-F)\leqslant m^*(G-E)+m^*(E-F)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

充分性 若于任意$\varepsilon>0$，恒有开集G和闭集F，使$G\supseteq E\supseteq F$，且 $m(G-F)<\varepsilon$，则有 $G-E\subseteq G-F$，并且

$$m^*(G-E)\leqslant m(G-F)<\varepsilon$$

由§4定理8知E是可测集。

8 **解** 1° 在$[0,1]$上去掉居中的长为$\frac{1}{5}$的开区间$I_1^{(1)}$，余下的两个闭区间记为 $\Delta_1^{(1)}$，$\Delta_2^{(1)}$。

2° 在闭区间$\Delta_1^{(1)}$与$\Delta_2^{(1)}$上去掉居中的长为$\frac{1}{5^2}$的两个开区间 $I_1^{(2)}$，$I_2^{(2)}$，余下的4个闭区间记为 $\Delta_1^{(2)},\Delta_2^{(2)},\Delta_3^{(2)},\Delta_4^{(2)}$。

3° 依此继续下去。设去掉的所有开区间的并集为 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{2^{n-1}}I_i^{(n)}$，则$G$为开集，且

$$mG=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{n-1}}mI_i^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot\frac{1}{5^n}=\frac{1}{3}$$

令 $E=[0,1]-G$，则E是可测集，且 $[0,1]=G\cup E$，故$m[0,1]=mG+mE$。从而

$$mE=m[0,1]-mG=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

由E的定义及第二章 §4 定理6知，E是完备集，又E不含有任何开区间，故E为所求的完备集。

9　证　设m的基数为μ，而N的基数为 2^c（c为连续基数，参看主要参考文献〔3〕）．

$\mu \leqslant 2^c$ 是显然的．故只须证$\mu \geqslant 2^c$ 为此，只须证明m有子族S，使$\overline{\overline{S}} = 2^c$．

事实上，设F为康托集，则$mF = 0$，且$\overline{\overline{F}} = c$．设$S$是$F$的所有子集作成的集族，由于 $mF = 0$，故S的由F是所有可测子集组成的集族，从而$S \subseteq m$，并且$\overline{\overline{S}} = 2^c$．于是有 $\mu \geqslant 2^c$．

综上证得 $\mu = 2^c$．即$\overline{\overline{m}} = \overline{\overline{N}}$．

§5　习 题 解 答

1　证　用反证法

必要性　假设 $A \neq \phi$，$B \neq \phi$，则必有 $x \in A$，$y \in B$，使$(x, y) \in A \times B$．这与 $A \times B = \phi$ 矛盾．故必有$A = \phi$或$B = \phi$．

充分性　若 $A \times B \neq \phi$，则必有$(x, y) \in A \times B$，使$x \in A$，$y \in B$．这与$A = \phi$或$B = \phi$矛盾．从而必有 $A \times B = \phi$．

2　证　充分性是显然的．现证必要性．若有 $x_1 \in A_1$ 且$x_1 \notin A_2$，则有

$$(x_1, y_1) \in A_1 \times B_1, \text{ 但 } (x_1, y_1) \notin A_2 \times B_2$$

这与$A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$相矛盾，从而$A_1 \subseteq A_2$．同理可证$B_1 \subseteq B_2$．

3　证　由题设知

$$A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2 \text{ 且 } A_2 \times B_2 \subseteq A_1 \times B_1$$

根据本节习题2知

$$A_1 \subseteq A_2 \text{ 且 } A_2 \subseteq A_1$$

$$B_1 \subseteq B_2 \text{ 且 } B_2 \subseteq B_1$$

从而得　$A_1 = A_2$，$B_1 = B_2$．

第四章　可测函数习题解答

§1　习题解答

1　证　只须证对任何 $x_0\in E$,存在 $N(x_0,\ \delta)\subseteq E$。

因为 $f(x_0)\in G$,且 G 为开集，故必有 $V(f(x_0),\ \varepsilon)\subseteq G$。又知 $f(x)$ 在 x_0 点连续，从而有 $N(x_0,\ \delta)$,使

$$f(N(x_0,\ \delta))\subseteq V(f(x_0),\ \varepsilon)\subseteq G$$

即 $N(x_0,\ \delta)\subseteq E$。

2　证　对某个 $\varepsilon_0>0$,对任意 $\delta>0$,取 $x_1=x$, $x_2=x+\Delta x$,而当 $|x_1-x_2|=|\Delta x|<\delta$ 时，总有

$$|x_1^2-x_2^2|=|x^2-(x+\Delta x)^2|=|\Delta x||2x-\Delta x|$$

由此可知，不论对确定的多么小的 Δx，总可以取到足够大的 x，使 $|x_1^2-x_2^2|$ 大于 ε_0，所以 $f(x)$ 不是一致连续函数。

3　证　先证距离公理中的三角不等式关于集合间也成立。我们往证：对于 $R^{(n)}$ 中任意点 x_1，x_2 和非空集合 A，有

$$\rho(x_1,\ A)\leqslant\rho(x_1,\ x_2)+\rho(x_2,\ A)$$

成立。

任取 $x\in A$，则 $\rho(x_1,\ x)\leqslant\rho(x_1,\ x_2)+\rho(x_2,\ x)$，因此，

$$\rho(x_1,\ A)=\inf_{x\in A}\rho(x_1,\ x)\leqslant\inf_{x\in A}[\rho(x_1,\ x_2)+\rho(x_2,\ x)]$$

$$=\rho(x_1,\ x_2)+\inf_{x\in A}\rho(x_2,\ x)=\rho(x_1,\ x_2)+\rho(x_2,\ A).$$

次证 $f(x)=\rho(x, A)$在$R^{(n)}$上是一致连续函数．因为

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|\rho(x_1, A)-\rho(x_2, A)|$$

由集合间的三角不等式有

$$|\rho(x_1,A)-\rho(x_2,A)|\leqslant|\rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,A)-\rho(x_2,A)|$$
$$=\rho(x_1,x_2)$$

只须取$\delta=\varepsilon$，则对$R^{(n)}$的任意两点 x_1，x_2，只若$\rho(x_1, x_2)<\delta$，恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$．即 $f(x)=\rho(x,A)$是$R^{(n)}$上的一致连续函数。

4　**证**　先证有界．若 $f(x)$无界，那么对任何自然数n，都能找到点 $x_n\in M$，使得 $|f(x_n)|>n$。考虑M的序列 $\{x_n\}$，（或$\{x_n\}$ 的收敛于 x_0 的子列），由 $f(x)$ 的连续性就有 $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$，这是不可能的．因为 $f(x_0)$是一个确定的实数，而$f(x_n)$ 的绝对值是无限增大的，故 $f(x)$在M上必有界．

次证确界可达．不妨只就上确界情形证之．只须证有$x_0\in M$，使 $f(x_0)=\alpha$（其中α为函数值的上确界）．

由上确界的定义，必存在$x_n\in M$，使

$$\alpha\geqslant f(x_n)>\alpha-\frac{1}{n}$$

对任意自然数n成立．不妨设序列 $x_n\to x_0$（$n\to\infty$），且$x_0\in M$，则由 $f(x)$ 的连续性，必有

$$\alpha=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$$

5　**证**　设 $x_0\in M$，则由孤立点的定义，对任意 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使 $N(x_0, \delta)\cap M=\{x_0\}$，当 $x\in N(x_0, \delta)\cap M$ 时，总有

$$|f(x_0)-f(x)|=|f(x_0)-f(x_0)|=0<\varepsilon$$

故 $f(x)$在M上连续．

但未必一致连续．反例：设$M=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$,

$f\left(\frac{1}{n}\right)=n$。

对 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任意 $\delta>0$，只要$\rho\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)<\delta$,就有

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|=|n-(n+1)|=1>\frac{1}{2}$$

故$f\left(\frac{1}{n}\right)=n$ 不是一致连续的。

6 证 必要性 若$f(x)$在a点连续,往证$f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$。

因为 $f(x)$ 在 a 点连续，则对任意 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，当 $x\in N(a, \delta)\cap M$，使得：

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon,\text{ 即 } f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$$

于是

$$\sup_{\substack{x\in N(a,\delta)\cap M\\ x\neq a}}\{f(x)\}\leqslant f(a)+\varepsilon,\text{ 从而}\overline{\lim_{x\to a}}f(x)\leqslant f(a)+\varepsilon$$

因为 ε 任意，故有$\overline{\lim\limits_{x\to a}}f(x)\leqslant f(a)$；

又 $$\sup_{\substack{x\in N(a,\delta)\cap M\\ x\neq a}}\{f(x)\}\geqslant f(a)-\varepsilon,\text{ 从而}\overline{\lim_{x\to a}}f(x)\geqslant f(a)-\varepsilon$$

因为 ε 任意，所以有

$$\overline{\lim_{x\to a}}f(x)\geqslant f(a)$$

从而 $$\overline{\lim_{x\to a}}f(x)=f(a)$$

同理可证$\underline{\lim\limits_{x\to a}}f(x)=f(a)$

则得 $\overline{\lim_{x\to a}} f(x)=\underline{\lim_{x\to a}} f(x)=f(a)$

即 $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$

充分性 若 $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$，往证 $f(x)$ 在a点连续。因为已知 $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$，所以

$$f(a)=\overline{\lim_{x\to a}} f(x)=\underline{\lim_{x\to a}} f(x)$$

因$\overline{\lim_{x\to a}} f(x)=f(a)$，即 $\inf\limits_{U}\{\sup\limits_{\substack{x\in U\cap M\\ x\neq a}} f(x)\}=f(a)$（$U$ 表示 a 的邻域）。由下确界定义，必存在$U'(a,\delta')$，使$\sup\limits_{\substack{x\in U'\cap M\\ x\neq a}} f(x)<f(a)+\varepsilon$。从而，对于$U'(a, \delta')$必有 $f(x)<f(a)+\varepsilon$；

又 $\underline{\lim_{x\to a}} f(x)=\sup\limits_{U}\{\inf\limits_{\substack{x\in U\cap M\\ x\neq a}} f(x)\}=f(a)$

由上确界定义，必存在 $U''(a, \delta'')$，使

$$\inf_{\substack{x\in U''\cap M\\ x\neq a}} f(x)>f(a)-\varepsilon$$

从而，对于 $U''(a, \delta'')$必有 $f(x)>f(a)-\varepsilon$。取 $\delta=\min\{\delta', \delta''\}$，则对任意 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，当 $x\in U(a, \delta)\cap M$，使得 $f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$。即 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$成立。故 $f(x)$ 在 a 点必连续。

§2 习题解答

1 证 设N为实数集R上的有理数集，对任意实数a

$$\{x\,|D(x)>a\}=\begin{cases}\phi & 当\ a\geqslant 1\\ N & 当\ 1>a\geqslant 0\\ R & 当\ a<0\end{cases}$$

因为 ϕ，N，R皆可测，所以对任意实数 α，$\{x \mid D(x)>\alpha\}$皆可测，故$D(x)$为R上的可测函数.

2　证　设 $Q=\{x \mid x=\frac{m}{n}$，其中m和n为互质的数$\}$．令R表示实数集.

对任意实数α，

$$\{x \mid R(x)>\alpha\}=\begin{cases}\phi & \text{当 } \alpha\geqslant 1\\ Q^*\subseteq Q & \text{当} 1>\alpha\geqslant 0\\ R & \text{当 } \alpha<0\end{cases}$$

因为 ϕ，Q^*，R皆可测，所以对任意实数 α，$\{x \mid R(x)>\alpha\}$皆可测，故 $R(x)$为可测函数.

3　证　设 $f(x)=y_i$，$x\in E_i$ $(i=1,\ 2,\cdots,m)$，E_i皆可测且$\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i=E$，$E_i\cap E_j=\phi(i\neq j)$，令$a=\max\{y_i\}$，$b=\min\{y_i\}$.

对任意实数 α，则有

$$\{x \mid f(x)>\alpha\}=\begin{cases}\phi & \text{当 } \alpha\geqslant a\\ \bigcup\limits_{f(E_j)=y_j>\alpha}E_j & \text{当 } a>\alpha\geqslant b\\ E & \text{当 } \alpha<b\end{cases}$$

而 ϕ，$\bigcup\limits_{f(E_j)=y_j>\alpha}E_j$ 及E皆可测，所以 $f(x)$ 是可测函数.

4　证　不妨设 $f(x)$在R上非负单调不减. 于任意实数α，往证 $\{x \mid f(x)>\alpha\}$恒为可测集.

事实上，对任意实数α，若对任意$x\in R$，恒有 $f(x)>\alpha$或恒有 $f(x)\leqslant\alpha$，则分别有

$$\{x \mid f(x)>\alpha\}=R;\quad \{x \mid f(x)>\alpha\}=\phi$$

若存在 x_1，$x_2\in R$，使 $f(x_1)\leqslant\alpha$，$f(x_2)>\alpha$．令

$$x^*=\inf\{x \mid f(x)>\alpha\}$$

则当 $f(x^*)>a$或 $f(x^*)\leqslant a$时，分别有

$\{x\mid f(x)>a\}=[x^*,\ \infty)$；$\{x\mid f(x)>a\}=(x^*,\ \infty)$ 因 R、ϕ、$[x^*,\infty)$，(x^*,∞)都是可测集，故 $f(x)$是可测函数。

§3 习题解答

1 **证** 对任意实数a和E上的函数$f(x)$，因为$\{x\mid f(x)>a\}\subseteq E$且 $mE=0$，所以 $m\{x\mid f(x)>a\}=0$。即 $\{x\mid f(x)>a\}$是可测集，从而 $f(x)$ 是E上的可测函数。

2 **证** 只须证：对任意实数a，$\{x\mid f(x)>a\}$ 是可测集。因为 $f(x)$在E上连续，所以 $\{x\mid f(x)>a\}$是E中开集，则必有开集 $G\subseteq R^{(n)}$，使$\{x\mid f(x)>a\}=E\cap G$，而E，G皆可测，故 $\{x\mid f(x)>a\}$可测，从而 $f(x)$是E上的可测函数。

3 **证** 先证：若 $f(x)$ 在E上可测，则 $g(x)$ 在E上必可测。

设 $\{x\mid f(x)\neq g(x)\}=N$， 由题设 $mN=0$。

对任意实数 a，

$\{x\mid g(x)>a\}=\{x\mid f(x)=g(x),\ g(x)>a\}\cup\{x\mid f(x)\neq g(x),\ g(x)>a\}$， 由于等式右端二集皆可测，从而并集亦可测。故$\{x\mid g(x)>a\}$可测，于是证得 $g(x)$在E上是可测函数。

同理可证：若 $g(x)$可测，则 $f(x)$亦可测。

次证：若 $f(x)$在E上不可测，则$g(x)$亦不可测。

反证：设$g(x)$可测，由上面的证明 $f(x)$ 必可测，则与题设矛盾，故$g(x)$必不可测。

4 与§2题4 的证法相同。

5 **证** 设E_1是E的任意可测子集。

对任意实数 α，

$$\{x \mid x\in E_1,\ f(x)\geqslant\alpha\}=E_1\cap\{x \mid f(x)\geqslant\alpha\}$$

而右端的两个集合皆可测，故交集可测，即 $\{x \mid x\in E_1, f(x)\geqslant\alpha\}$可测，从而 $f(x)$是E_1上的可测函数。

6　证　对任意实数 α，显然有

$$\{x \mid f(x)>\alpha\}=\bigcup_{r_n>\alpha}^{\infty}\{x \mid f(x)\geqslant r_n\}$$

事实上，若 $x_0\in$左，则 $f(x_0)>\alpha$，故必有 r_{n_0}，使 $f(x_0)\geqslant r_{n_0}>\alpha$，$\therefore$ $x_0\in$右；反之，若 $x_0\in$右，则必有：$f(x_0)\geqslant r_{n_0}>\alpha$，$\therefore$ $f(x_0)>\alpha$，于是 $x_0\in$左。

由假设等式右端是可列个可测集之并，所以 $\{x \mid f(x)>\alpha\}$对于任意实数α皆可测，故 $f(x)$ 在E上可测。

7　证　只举一例以明之。

设E是[0，1]中的一个不可测集，令

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in E \\ -x & x\overline{\in} E \end{cases}$$

因为$|f(x)|=x$，显然是[0,1]上的可测函数．但 $f(x)$在[0,1]上并非可测．因为 $\{x \mid f(x)\geqslant 0\}=E$，而$E$是[0，1]中的不可测集，故 $f(x)$在[0,1]上不是可测函数。

8　证　必要性．设 $f(x)$ 在E上可测，往证存在简单函数列 $\{\Phi_n(x)\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(x)=f(x)$。

因为 $f(x)$在E上可测，这即是说 $f^+(x)$，$f^-(x)$均在E上非负可测，即

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x),\ f^+(x)\geqslant 0,\ f^-(x)\geqslant 0$$

根据非负可测函数的定义知，必存在简单函数 $\varphi'_n(x)$ 和 $\varphi''_n(x)$，满足：

$$0\leqslant\varphi_1'(x)\leqslant\varphi_2'(x)\leqslant\cdots,\ \lim_{n\to\infty}\varphi_n'(x)=f^+(x)$$

$$0\leqslant\varphi_1''(x)\leqslant\varphi_2''(x)\leqslant\cdots,\lim_{n\to\infty}\varphi_n''(x)=f^-(x)$$

令 $\Phi_n(x)=\varphi_n'(x)-\varphi_n''(x)$，由简单函数的性质知 $\Phi_n(x)$ 是简单函数，而

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n'(x)-\lim_{n\to\infty}\varphi_n''(x)=f^+(x)-f^-(x)=f(x)$$

必要性得证。

充分性　若有一列简单函数 $\Phi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$，使 $\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)=f(x)$，往证 $f(x)$ 在 E 上必是可测函数。

因为 $\Phi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 既然是简单函数，所以必为可测函数，由§3定理6知，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)$$

是可测函数。

9　证　由 $f_1(x)$是 $E_1\subseteq R^p$，$f_2(y)$ 是 $E_2\subseteq R^q$ 上的可测函数告诉我们：E_1，E_2分别是R^p和R^q中的可测集，从而 $E_1\times E_2$ 是 R^{p+q} 中的可测集。由上题知存在简单函数列 $\varphi_n'(x)$ 和 $\varphi_n''(y)$，使

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n'(x)=f_1(x)\,(\text{在}E_1\text{上}),\lim_{n\to\infty}\varphi_n''(y)=f_2(y)\ (\text{在}E_2\text{上})$$

我们令：$\varphi_n'(x,y)=\varphi_n'(x)$，$\varphi_n''(x,y)=\varphi_n''(y)$，可知 $\varphi_n'(x,y)$，$\varphi_n''(x,y)$ 是 $E_1\times E_2$上的简单函数。

$$\varphi_n'(x,y)\cdot\varphi_n''(x,y)=\varphi_n'(x)\cdot\varphi_n''(y)$$

亦是 $E_1\times E_2$ 上的简单函数。

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n'(x,y)\cdot\varphi_n''(x,y)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n'(x)\cdot\varphi_n''(y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

由上题可知 $f_1(x)\cdot f_2(y)$是$E_1\times E_2$上的可测函数。

§5 习题解答

1 证 对$\varepsilon_n=\frac{1}{n}$，令$M=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，$E_1=E\setminus M$，则 $mE_1=m(E\setminus M)=0$。对于任意实数 a，

$$\{x \mid f(x)\geqslant a,\ x\in F_n\}$$

是闭集，于是，

$$\{x \mid f(x)\geqslant a, x\in M\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \mid f(x)\geqslant a,\ x\in F_n\}$$ 是可测集。从而

$$\{x \mid f(x)\geqslant a, x\in E\}=\{x \mid f(x)\geqslant a, x\in M\}\cup\{x \mid f(x)\geqslant a,\ x\in E_1\}$$

为可测集，因a任意，故 $f(x)$ 在E上可测。

2 证 1° 设

$$S_1=\{x \mid |x_i|\leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

$$S_p=\{x \mid p-1<|x_i|\leqslant p,\ i=1,2,\cdots,n\}\ (p=2,3,\cdots)$$

从而 $mS_p<+\infty$ （$p=1,2,\cdots$），且 $R^n=\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}S_p$。于是 $E=\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}(E\cap S_p)$。记$E_p=E\cap S_p$，则$E=\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}E_p$，且 $E_p\cap E_q=\phi(p\neq q)$，$mE_p<+\infty$ $(p=1,\ 2,\ \cdots)$。

因 $mE_p<+\infty$，$f(x)$在 E_p 上可测($p=1,\ 2,\ \cdots$)，故由测度有限条件下的鲁金定理知，对每个 p存在闭集 $F_p\subseteq E_p$，使

$$m(E_p\setminus F_p)<\frac{\varepsilon}{2^p}$$

且 $f(x)$ 在 F_p 上连续。

2° 令 $F=\bigcup_{p=1}^{\infty}F_p$，则 F 为闭集。

事实上，设 $x_0\in F'$，则有 $\{x_n\}\subseteq F=\bigcup_{p=1}^{\infty}F_p$，使 $x_n\to x_0(n\to\infty)$。因 $x_0\in R^n$，故有 k_0 使 $x_0\in S_{k_0}$，但

$$S_{k_0}\cap S_{k_0-1}=\phi,\quad S_{k_0}\cap S_{k_0+1}=\phi$$

而 $F_{k_0-1}\subseteq S_{k_0-1}$，$F_{k_0+1}\subseteq S_{k_0+1}$，故有

$$x_0\notin F_{k_0-1},\quad 且\quad x_0\notin F_{k_0+1}$$

于是由 F_{k_0-1}，F_{k_0+1} 是闭集可知，

$$\delta_{k_0-1}=\rho(x_0,\ F_{k_0-1})>0,\quad \delta_{k_0+1}=\rho\ (x_0,\ F_{k_0+1})>0$$

取 $\delta=\min\{\delta_{k_0-1},\ \delta_{k_0+1}\}$，则由 $x_n\to x_0$ 知存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$x_n\in N(x_0,\delta)\cap F=\bigcup_{p=1}^{\infty}(N(x_0,\ \delta)\cap F_p)$$

由 $\delta>0$ 的定义显然只要 $p\neq k_0$，则恒有

$$N(x_0,\ \delta)\cap F_p=\phi$$

所以当 $n\geqslant N$ 时，$x_n\in N(x_0,\ \delta)\cap F_{k_0}$，由此知 $x_0\in F'_{k_0}$，但 F_{k_0} 是闭集，故 $x_0\in F_{k_0}\subseteq F$，得证 F 是闭集。且由

$$E\setminus F=\bigcup_{p=1}^{\infty}E_p\Big\backslash\bigcup_{p=1}^{\infty}F_p\subseteq\bigcup_{p=1}^{\infty}(E_p\setminus F_p)$$

得

$$m(E\setminus F)\leqslant\sum_{p=1}^{\infty}m(E_p\setminus F_p)<\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^p}=\varepsilon$$

3° $f(x)$ 在 F 上连续。

事实上，任取 $x\in F$，若 x 是 F 的孤立点，则 $f(x)$ 在 x 处连续；若 $x\in F'$，由2°证明过程知，对任意 $\{x_n\}\subseteq F$ 使 $x_n\to x$，有

p_0及N，使当 $n\geqslant N$时，$x_n\in F_{p_0}$。于是由 $f(x)$在 F_{p_0}上连续知有 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$，即 $f(x)$在F上连续。

综上本题证毕。

3 证 设$A_k=\{x\,\big|\,|f(x)|>k\}$，$Q=\{x\,\big|\,|f(x)|=\infty\}$，则由题设$mQ=0$。但 $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots$，$Q=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$，得

$$\lim_{k\to\infty} mA_k=mQ=0$$

故必有k_0，使 $mA_{k_0}<\varepsilon$。

今在E上定义：

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\in E\setminus A_{k_0}\\ 0 & x\in A_{k_0}\end{cases}$$

函数$g(x)$显然是可测的，并且是有界的。事实上，

$$|g(x)|\leqslant k_0$$

且

$$\{x\mid f(x)\neq g(x)\}=A_{k_0}$$

故 $g(x)$即合于所要求的有界可测函数。

§6 习题解答

1 证 只须证对任何 $\sigma>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} m\{x\,\big|\,|f_n(x)-g(x)|\geqslant\sigma\}=0$$

对任何 $\sigma>0$，

$$\{x\,\big|\,|f_n(x)-g(x)|\geqslant\sigma\}\subseteq\{x\mid f(x)\neq g(x)\}\cup\{x\,\big|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}$$

由题设知

$$m\{x \mid f(x) \neq g(x)\} = 0$$

所以

$$m\{x \mid |f_n(x) - g(x)| \geqslant \sigma\} \leqslant m\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\}$$

因为 $f_n(x) \Longrightarrow f(x)$，取极限有

$$\lim_{n\to\infty} m\{x \mid |f_n(x) - g(x)| \geqslant \sigma\}$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} m\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\} = 0$$

故证得

$$\lim_{n\to\infty} m\{x \mid |f_n(x) - g(x)| \geqslant \sigma\} = 0$$

2　证　只须证对任意 $\sigma>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} m\{x \mid |[f_n(x) + g_n(x)] - [f(x) + g(x)]| \geqslant \sigma\} = 0$$

因为

$$|[f_n(x) + g_n(x)] - [f(x) + g(x)]|$$

$$\leqslant |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|$$

对任意 $\sigma>0$，

$$\{x \mid |[f_n(x) + g_n(x)] - [f(x) + g(x)]| \geqslant \sigma\} \subseteq$$

$$\left\{x \,\middle|\, |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\} \cup \left\{x \,\middle|\, |g_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\}$$

所以

$$m\{x \mid |[f_n(x) + g_n(x)] - [f(x) + g(x)]| \geqslant \sigma\}$$

$$\leqslant m\left\{x \,\middle|\, |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\}$$

$$+ m\left\{x \,\middle|\, |g_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\}$$

由已知，当 $n\to\infty$时，则有

$$m\{x \mid |[f_n(x) + g_n(x)] - [f(x) + g(x)]| \geqslant \sigma\} \to 0$$

即，对任意$\sigma>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} m\{x \mid |[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]| \geq \sigma\} = 0$$

3　证　只须举出反例即可。

在 $(0, \infty)$上定义函数 $f_n(x)$如下：

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in (n-1, n) \\ 0 & x \overline{\in} (n-1, n) \end{cases}$$

显然 $f_n(x) \to f(x) \equiv 0 \ (n\to\infty)$。

但对 $\sigma = \frac{1}{2}$，则$m\left\{x \mid |f_n(x)-f(x)| \geq \frac{1}{2}\right\} = m(n-1, n) = 1$，

故 $f_n(x) \not\Rightarrow f(x)$。

4　证　必要性 若 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$，那末它的任何子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 显然也有 $f_{n_k}(x) \Rightarrow f(x)$。对 $\{f_{n_k}(x)\}$和 $f(x)$应用黎斯定理，则必有子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$几乎处处收敛于 $f(x)$。

充分性　设 $\{f_n(x)\}$的任何子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 都有子序列 $\{f_{n_{k_\nu}}(x)\}$几乎处处收敛于 $f(x)$。下面往证：$f_n(x) \Rightarrow f(x)$。

假若 $f_n(x) \not\Rightarrow f(x)$，那末必存在 $\varepsilon>0$，使得

$$m\{x \mid |f_n(x)-f(x)| \geq \varepsilon\}$$

不收敛于0，因此必有子序列$\{f_{n_k}(x)\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} m\{x \mid |f_{n_k}(x)-f(x)| \geq \varepsilon\} > 0 \qquad (1)$$

如此，$\{f_{n_k}(x)\}$ 中就不能存在几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子序列。因为如果有子序列 $\{f_{n_{k_\nu}}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$，在 $mE<+\infty$ 条件下，必有

$$\lim_{\nu\to\infty} m\{x \mid |f_{n_{k_\nu}}(x)-f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

这和(1)式相矛盾。故 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$。

5　证　任取两个单调下降的正数列$\{\sigma_n\}$，$\{\varepsilon_n\}$，对每个n，由于 $f_k^{(n)}(x) \Rightarrow f^{(n)}(x) \ (k\to\infty)$。必有 k_n，使得

$$m\left\{x\,\Big|\,|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\frac{\sigma_n}{2}\right\}<\frac{\varepsilon_n}{2}$$

下面往证：序列 $\{f_{k_n}^{(n)}(x)\}$ 即为所求。

对任给 $\varepsilon>0$，$\sigma>0$，存在正整数N_1，当$n\geqslant N_1$ 时，$\sigma_n<\sigma$，$\varepsilon_n<\varepsilon$。

$$\left\{x\,\Big|\,|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right\}$$

$$\subseteq\left\{x\,\Big|\,|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\frac{\sigma_n}{2}\right\}\quad(n\geqslant N_1)$$

$$m\left\{x\,\Big|\,|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right\}$$

$$\leqslant m\left\{x\,\Big|\,|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\frac{\sigma_n}{2}\right\}<\frac{\varepsilon_n}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

又由 $f^{(n)}(x)\Longrightarrow f(x)$知，必存在$N_2$，当 $n\geqslant N_2$时，

$$m\left\{x\,\Big|\,|f^{(n)}(x)-f(x)|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right\}<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N=\max\{N_1,\ N_2\}$，当 $n\geqslant N$时，有

$$m\left\{x\,\Big|\,|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right\}<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$m\left\{x\,\Big|\,|f^{(n)}(x)-f(x)|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right\}<\frac{\varepsilon}{2}$$

而

$$\{x\,|\,|f_{k_n}^{(n)}(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}$$

$$\subseteq\left\{x\,\Big|\,|f_{k_n}^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right\}$$

$$\cup\left\{x\,\Big|\,|f^{(n)}(x)-f(x)|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right\}$$

从而当 $n\geqslant N$时，有

$$m\{x\,|\,|f_{k_n}^{(n)}(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即

$$f_{k_s}^{(s)}(x) \Longrightarrow f(x)$$

6 证 必要性由于 $f_n(x) \Longrightarrow f(x)$，对任意给定的$\varepsilon>0$，$\sigma>0$，必存在 N，当 $n>N$时，

$$m\left\{x \,\middle|\, |f_n(x)-f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

又易知，

$$\{x \mid |f_n(x)-f_m(x)| \geqslant \sigma\} \subseteq \left\{x \,\middle|\, |f_n(x)-f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\} \cup \left\{x \,\middle|\, |f_m(x)-f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned} & m\{x \mid |f_n(x)-f_m(x)| \geqslant \sigma\} \\ \leqslant & m\left\{x \,\middle|\, |f_n(x)-f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\} \\ & + m\left\{x \,\middle|\, |f_m(x)-f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\} \end{aligned}$$

从而当 $n>N$，$m>N$时，

$$m\{x \mid |f_n(x)-f_m(x)| \geqslant \sigma\} < \varepsilon$$

充分性 先找出一个子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在E上几乎处处收敛。

任取数列$\{\eta_k\}$，$\eta_k>0$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta_k<+\infty$。由题设条件知，存在$n_k$，使得

$$m\left\{x \,\middle|\, |f_{n_k}(x)-f_{n_{k+m}}(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\right\} < \eta_k$$

$$(k=1,2,\cdots,m=1,2,\cdots)$$

从而可取 $n_k \uparrow +\infty$，且有

$$m\left\{x \,\middle|\, |f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\right\} < \eta_k$$

对这串 $\{n_k\}$ 作 Q, P,

$$Q=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\geqslant\frac{1}{2^k}\right\}$$

令
$$P=E\setminus Q=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=i}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|<\frac{1}{2^k}\right\}$$

$$R_i=\bigcup_{k=i}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\geqslant\frac{1}{2^k}\right\}$$

显然

$$R_1\supseteq R_2\supseteq R_3\supseteq\cdots\supseteq R_n\supseteq R_{n+1}\supseteq\cdots$$

$$Q=\bigcap_{i=1}^{\infty}R_i$$

因此

$$\begin{aligned}mQ&=\lim_{i\to\infty}mR_i\\&\leqslant\lim_{i\to\infty}\sum_{k=i}^{\infty}m\left\{x\,\middle|\,|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\geqslant\frac{1}{2^k}\right\}\\&\leqslant\lim_{i\to\infty}\sum_{k=i}^{\infty}\eta_k=0\end{aligned}$$

所以

$$mQ=0$$

下面证明 $\{f_{n_k}(x)\}$ 是 P上的收敛基本列，记

$$\begin{aligned}P&=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=i}^{\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|<\frac{1}{2^k}\right\}\\&=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\end{aligned}$$

显然

$$A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq A_{i+2} \subseteq \cdots$$

若 $x \in P$，必存在 i_0，使得 $x \in A_{i_0} \subseteq A_{i_0+1} \subseteq \cdots$，对任给的 $\varepsilon > 0$，必有 $i > i_0$，使得 $\frac{1}{2^{i-1}} < \varepsilon$，$x \in A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \cdots$，故对一切 $l > i$，$m = 1, 2, \cdots$，有

$$|f_{n_l}(x) - f_{n_{l+m}}(x)| \leqslant \sum_{j=l}^{m} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|$$

$$\leqslant \sum_{j=i}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|$$

$$\leqslant \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{i-1}} < \varepsilon$$

所以，$f_{n_k}(x)$ 在 P 上收敛于某个 $f(x)$。

其中

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) \qquad (x \in P)$$

显然

$$f_{n_k}(x) \Longrightarrow f(x)$$

于是对任给的 $\sigma > 0$，$\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n_k > N$，$n > N$ 时，

$$m\left\{x \,\middle|\, |f_n(x) - f_{n_k}(x)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\} > \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m\left\{x \,\middle|\, |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

而

$$\{x \,|\, |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\} \subseteq \left\{x \,\middle|\, |f_n(x) - f_{n_k}(x)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\} \cup \left\{x \,\middle|\, |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\}$$

所以，当 $n>N$时，

$$m\{x \| f_n(x)-f(x)| \geqslant \sigma\}<\varepsilon$$

即

$$f_n(x) \Longrightarrow f(x)$$

第五章　勒贝格积分习题解答

§1　习 题 解 答

1　**证**　由题设知$mE<+\infty$。令 $D: E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 是E的任意一个分划。因 $\chi_E(x)$在E上恒等于1，故在每个 E_i 上的上确界为1，下确界亦为1。于是关于分划D之大和

$$S_D=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot mE_i=\sum_{i=1}^{n} mE_i=mE$$

相应的小和

$$S_D=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot mE_i=\sum_{i=1}^{n} mE_i=mE$$

从而

$$\sup_D\{s\}=mE=\inf_D\ \{S\}$$

即

$$\underline{\int}_E \chi_E(x)\,dx=\overline{\int}_E \chi_E(x)\,dx=mE$$

据有界函数勒贝格积分之定义可知，$\chi_E(x)$ 在E上勒贝格可积，而且

$$\int_E \chi_E(x)\,dx=mE$$

2　证　由题设，$f(x)$ 在点集 E 上有界可积，所以 $f(x)$ 在 E 上有界可测。根据可测函数的性质 $[f(x)]^2$，$|f(x)|$ 在集合 E 上也有界可测，从而它们是勒贝格可积的。然而 $\frac{1}{f(x)}$ 未必勒贝格可积。即使 $\frac{1}{f(x)}$ 可测，但 $\frac{1}{f(x)}$ 可能无界，而无界函数就可能是不可积的。例如 $(0,1)$ 上的函数 $f(x)=x^2$，是有界可测的。但 $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 上无界，且是勒贝格不可积的。

3　证　根据题设知 $f'(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有界，如能证得 $f'(x)$ 是 $[a,\ b]$ 上的可测函数，它便是勒贝格可积的了。

因为 $f(x)$ 的导数在 $[a,\ b]$ 上几乎处处存在，所以 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上几乎处处连续，于是 $f(x)$ 是 $[a,\ b]$ 上的可测函数。

令

$$\varphi_n(x)=\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}\quad x\in\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$$

$$n=1,\ 2,\ \cdots$$

则对固定的 n，$\varphi_n(x)$ 在 $\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$ 上可测，由于几乎对所有的 $x\in[a,\ b)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f'(x)$$

再注意 $[a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a,\ b-\frac{1}{n}\right]$，便可知 $f'(x)$ 在半闭区间 $[a,\ b)$ 上可测，从而 $f'(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可测。

§2　习题解答

答　黎曼积分理论中的达布定理现在已不成立。

例如在$[0,1]$上的迪里赫莱函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 为}[0,1]\text{中的有理数}\\ 0 & x\text{ 为}[0,1]\text{中的无理数}\end{cases}$$

是勒贝格可积的，且$\int_{[0,1]}f(x)dx=0$。于是 $\int_E^- f(x)dx=0$。但对 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，于任意的$\delta>0$，我们能找到自然数$n$，使$\frac{1}{n}<\delta$ 。取将$[0,1]$ n 等分的分划

$$D:\ E=[0,1]=\bigcup_{i=1}^{n}E_i,\ mE_i=\frac{1}{n}<\delta\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

显然 $\max\{mE_1,\ mE_2,\ \cdots,\ mE_n\}<\delta$。又因有理数在实数中的稠密性易知 $f(x)$在诸 E_i上的上确界为 1，故大和

$$S(D,f)=\sum_{i=1}^{n}1\cdot mE_i=mE=m[0,\ 1]=1$$

从而

$$\left|\int_{[0,1]}^- f(x)dx-S(D,f)\right|=|0-1|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

所以，黎曼积分理论中的达布定理在勒贝格积分理论中已不再成立。

§3 习题解答

1　解　根据积分关于区域的可加性有

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_{[0,\frac{1}{2})\setminus F}f(x)dx+\int_{[\frac{1}{2},1)\setminus F}f(x)dx+\int_F f(x)dx$$

因 $mF=0$，故$\int_F f(x)dx=0$。于是由$f(x)$定义

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{[0,\frac{1}{2})\setminus P} \sin \pi x dx + \int_{[\frac{1}{2},1)\setminus P} \cos\pi x dx$$

$$= (R)\int_0^{\frac{1}{2}} \sin\pi x dx + (R)\int_{\frac{1}{2}}^1 \cos\pi x dx$$

$$= 0$$

2 证 因为对任意实数$\sigma>0$,

$$\int_E f_n(x)\,dx = \int_{\{x\mid f_n(x)\geqslant\sigma\}} f_n(x)\,dx + \int_{\{x\mid f_n(x)<\sigma\}} f_n(x)\,dx$$

注意到 $f_n(x)\geqslant 0$, 故

$$\int_E f_n(x)\,dx \geqslant \int_{\{x\mid f_n(x)\geqslant\sigma\}} f_n(x)\,dx \geqslant \sigma\cdot m\{x\mid f_n(x)\geqslant\sigma\}$$

因此,

$$m\{x\mid f_n(x)\geqslant\sigma\}\leqslant\frac{1}{\sigma}\int_E f_n(x)\,dx$$

又由于 $\int_E f_n(x)\,dx\to 0\quad(n\to\infty)$, 所以

$$m\{x\mid f_n(x)\geqslant\sigma\}\to 0\ (n\to\infty),\ \text{即}\ f_n(x)\Longrightarrow 0$$

3 证 因函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$当 $x>-1$ 时严格增加, 故于任意的 $\sigma>0$,

$$\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}\Longleftrightarrow|f_n(x)|\geqslant\sigma$$

于是

$$\left\{x\,\middle|\,\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}\right\}=\{x\mid |f_n(x)|\geqslant\sigma\}\quad(*)$$

又因

$$\int_E\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx\to 0\quad(n\to\infty)$$

故由前题结果应有$\dfrac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\Longrightarrow 0$，所以

$$m\left\{x\left|\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}\right.\right\}\to 0\quad(n\to\infty)$$

从而由（*）式有

$$m\{x\,\|f_n(x)|\geqslant\sigma\}\to 0\quad(n\to\infty)$$

即 $\qquad f_n(x)\Longrightarrow 0$

§4 习题解答

1 解 由 $f(x)$ 定义知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上几乎处处等于 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$。于是

$$\int_{(0,1)}f(x)\,dx=\int_{(0,1)}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

因 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 上无界，故应用截断函数来计算 $\displaystyle\int_{(0,1)}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$。

设 $$\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}_n=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{当}\dfrac{1}{n^2}\leqslant x<1\\ n & \text{当}0<x<\dfrac{1}{n^2}\end{cases}$$

故 $$\int_{(0,1)}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1)}\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}_n dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\int_{\left(0,\frac{1}{n^2}\right)}n\,dx+\int_{\left[\frac{1}{n^2},1\right)}\frac{1}{\sqrt{x}}dx\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\frac{1}{n^2}+\left(2-\frac{2}{n}\right)\right]$$

$$=2$$

所以 $$\int_{(0,1)}f(x)dx=2$$

2 解 关于积分$\int_{[0,1]}f(x)dx$的计算与前题类似. 可得

$$\int_{[0,1]}f(x)dx=\int_{[0,1]-P}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\frac{3}{2}$$

又因 $f(x)$与 $f_1(x)$ 在$[0,1]$上几乎处处相等（注意康托集之测度为零）。所以

$$\int_{[0,1]}f(x)dx=\int_{[0,1]-P}f_1(x)dx.$$

3 证 先证必要性. 设 $f(x)$ 在E上非负可积，则由E_n之定义及积分之有限可加性，对任意自然数N，成立着

$$\int_E\{f(x)\}_Ndx=\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{N}E_n}\{f(x)\}_Ndx+\int_{\bigcup\limits_{n=N+1}^{\infty}E_n}\{f(x)\}_Ndx$$

$$\geqslant\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{N}E_n}\{f(x)\}_Ndx=\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{N}E_n}f(x)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\int_{E_n}f(x)dx\geqslant\sum_{n=1}^{N}(n-1)mE_n$$

$$=\sum_{n=1}^{N}n\ mE_n-\sum_{n=1}^{N}mE_n$$

因$\sum\limits_{n=1}^{N}mE_n\leqslant mE<+\infty$，故有

$$\int_E\{f(x)\}_Ndx+\sum_{n=1}^{N}mE_n\geqslant\sum_{n=1}^{N}n\cdot mE_n$$

对上式令$N\to\infty$，取极限得

$$\int_E f(x)\,dx+mE\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n$$

从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n$$

收敛。

至于充分性。由于对任意正整数N，

$$\begin{aligned}\int_E\{f(x)\}_N dx&=\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{N}E_n}\{f(x)\}_N dx+\int_{\bigcup\limits_{n=N+1}^{\infty}E_n}\{f(x)\}_N dx\\&=\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{N}E_n}f(x)\,dx+\int_{\bigcup\limits_{n=N+1}^{\infty}E_n}N\cdot dx\\&\leqslant\sum_{n=1}^{N}n\cdot mE_n+N\cdot m\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty}E_n\right)\\&=\sum_{n=1}^{N}n\cdot mE_n+N\cdot\sum_{n=N+1}^{\infty}mE_n\\&\leqslant\sum_{n=1}^{N}n\cdot mE_n+\sum_{n=N+1}^{\infty}n\cdot mE_n=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n\end{aligned}$$

注意级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n$收敛，故

$$\lim_{N\to\infty}\int_E\{f(x)\}_N dx<+\infty$$

即$f(x)$在E上非负可积。

4　证　对任意的$\varepsilon>0$，往证存在N，使当$n\geqslant N$时，有$n\cdot me_n<\varepsilon$。

首先证明$\lim\limits_{n\to\infty} me_n=0$，事实上，因 $f(x)$可积，故 $|f(x)|$ 也可积，于是

$$\int_E |f(x)|dx \geqslant \int_{e_n} |f(x)|dx \geqslant n\cdot me_n$$

或

$$me_n \leqslant \frac{1}{n}\int_E |f(x)|dx$$

因$\int_E |f(x)|dx < +\infty$，即得$\lim\limits_{n\to\infty} me_n=0$。

对 $\varepsilon>0$，由 $f(x)$的积分具有绝对连续性，故存在$\delta>0$，使当$e\subseteq E$，且 $me<\delta$ 时，有

$$\int_e |f(x)|dx<\varepsilon \qquad (*)$$

对上述的 $\delta>0$，因 $\lim\limits_{n\to\infty} me_n=0$，故存在N，当 $n\geqslant N$时，$me_n<\delta$，于是从(*)式知

$$\int_{e_n} |f(x)|dx<\varepsilon$$

再根据e_n之定义即得，当 $n\geqslant N$时，成立

$$n\cdot me_n \leqslant \int_{e_n} |f(x)|\,dx<\varepsilon$$

此即

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot me_n=0$$

§5 习题解答

1 证 因为在 (0,1) 上成立着

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

且$\frac{1}{1-x}$，x^{n-1}，$n=1, 2, \cdots$ 皆非负可测。故由勒贝格逐项积分定理，有

$$(L)\int_{(0,1)}\frac{1}{1-x}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_{(0,1)}x^{n-1}dx$$

2 解 因 $f_m(x)=\frac{mx}{1+m^2x^2}\sin mx$ 在[0,1]上处处收敛于0($m\to\infty$)。

又因 $(1-mx)^2=1-2mx+m^2x^2\geqslant 0$，故 $1+m^2x^2\geqslant 2mx$，所以

$$\left|\frac{mx}{1+m^2x^2}\sin mx\right|\leqslant\left|\frac{mx}{1+m^2x^2}\right|\leqslant\left|\frac{mx}{2mx}\right|=\frac{1}{2}$$

据勒贝格有界收敛定理，有

$$\lim_{m\to\infty}(L)\int_{[0,1]}\frac{mx}{1+m^2x^2}\sin mx\,dx=\int_{[0,1]}0\cdot dx=0$$

3 证 设

$$f_n(x)=\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\quad n=1, 2, \cdots$$

则此函数列在[0,1]上处处收敛于0，由于

$$|f_n(x)|=\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{2nx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=F(x)$$

易知$F(x)$在[0,1]上可积，故由勒贝格控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_{[0,1]}\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}dx=\int_{[0,1]}0\cdot dx=0$$

4 证 因为

$$\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\leqslant|f_n(x)|$$

所以，对任意的 $\sigma>0$，

$$\left\{x\left|\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\geqslant\sigma\right.\right\}\subseteq\{x\,|\,|f_n(x)|\geqslant\sigma\}$$

于是从 $f_n(x)\Longrightarrow 0$，可知

$$\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\Longrightarrow 0$$

又显然有

$$\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\leqslant 1\quad(n=1,\ 2,\ \cdots,\ x\in E)$$

故由勒贝格有界收敛定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx=\int_E 0\cdot dx=0$$

5 证 令 $f_1(x)=1-x$，$f_2(x)=x^2-x^3$，…

$f_n(x)=x^{2(n-1)}-x^{2n-1}$，… 则 $\{f_n(x)\}$是 $(0,1)$ 上非负可测函数列。显然，$x\in(0,1)$时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\frac{1}{1+x}$$

由勒贝格逐项积分定理得

$$(L)\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_0^1 f_n(x)dx\qquad(*)$$

而(*)式左端

$$(L)\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=(R)\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$$

(*)式右端

$$\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_0^1 f_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}(R)\int_0^1 (x^{2(n-1)}-x^{2n-1})\,dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

所以 $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

6 证 不妨设 $f_N(x)$ 为可积函数，$\{f_n(x)\}$ 在 E 上处处收敛于 $f(x)$。我们仅考虑函数列

$$f_N(x)\geqslant f_{N+1}(x)\geqslant\cdots\geqslant f_{N+n}(x)\geqslant\cdots \qquad (*)$$

令 $g_n(x)=f_N(x)-f_{N+n}(x) \qquad n=1,\ 2,\ \cdots$

则 $\{g_n(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列，且

$$g_1(x)\leqslant g_2(x)\leqslant\cdots\leqslant g_n(x)\leqslant\cdots$$

依勒维定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\,dx=\int_E (f_N(x)-f(x))\,dx$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_E (f_N(x)-f_{N+n}(x))\,dx=\int_E (f_N(x)-f(x))\,dx \quad (**)$$

因 $f_N(x)$ 可积及 $(*)$ 式可知 $f(x)$ 可积，所以

$$\int_E f_N(x)\,dx<+\infty,\quad \int_E f(x)\,dx<+\infty$$

故由 $(**)$ 式消去 $\int_E f_N(x)\,dx$ 后，即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_{N+n}(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx$$

亦即

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx$$

7 证 取δ_1，使 $0<\delta_1<\delta$。由题设可知，$f(x)$在闭区间$[a-\delta_1, b+\delta_1]$上可积。于是对任意的 $\varepsilon>0$，据§4的定理13，存在$[a-\delta_1, b+\delta_1]$上的连续函数 $\varphi(x)$，使

$$\int_{a-\delta_1}^{b+\delta_1}|f(x)-\varphi(x)|dx<\varepsilon/3 \qquad (1)$$

注意$\varphi(x)$在闭区间 $[a-\delta_1, b+\delta_1]$ 上连续，故$\varphi(x)$在其上一致连续。于是存在$\eta>0$，且 $\eta\leqslant\delta_1$，使当 $0<|h|<\eta$时，对一切 $x\in[a-\delta_1, b+\delta_1]$ 成立

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)} \qquad (2)$$

于是结合（1）、（2）两式

$$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx\leqslant\int_a^b|f(x+h)-\varphi(x+h)|dx$$

$$+\int_a^b|\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx+\int_a^b|\varphi(x)-f(x)|dx$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

它表明 $\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0$

§6 习题解答

1 证 首先，因为 $|f_n(x)|\leqslant F(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 且 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ $p.p$于E。故 $|f(x)|\leqslant F(x)$ $p.p$于E，于是从$F(x)$的可积性推得 $|f(x)|$ 在E上可积。从而 $f(x)$ 在E上可积。

对任意的 $\varepsilon>0$，因$F(x)$在E上可积，存在 k_0，使得

$$\int_{E \setminus E_{k_0}} F(x)dx < \frac{\varepsilon}{4} \tag{1}$$

其中 $E_{k_0} = \{x \mid -k_0 \leqslant x_i \leqslant k_0;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ x \in E\}$.

对上述k_0，施测度有限点集上的勒贝格控制收敛定理，存在N，当$n \geqslant N$时，

$$\left| \int_{E_{k_0}} [f_n(x) - f(x)] dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

于是对$\varepsilon > 0$，有N，当$n \geqslant N$时，由（1）、（2）得

$$\left| \int_E f_n(x) - \int_E f(x) dx \right| = \left| \int_E [f_n(x) - f(x)] dx \right|$$

$$\leqslant \left| \int_{E_{k_0}} [f_n(x) - f(x)] dx \right| + \left| \int_{E \setminus E_{k_0}} [f_n(x) - f(x)] dx \right|$$

$$\leqslant \left| \int_{E_{k_0}} [f_n(x) - f(x)] dx \right| + 2\int_{E \setminus E_{k_0}} F(x) dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即 $$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

2 证 设

$$f_n(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} \qquad n = 1,\ 2,\ \cdots$$

则 $\{f_n(t)\}$ 是 $(0,\ \infty)$ 上非负可测函数列，且易知对每个 $t \in (0,\ \infty)$ 有

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} = e^{-t}$$

对 $n \geqslant 2$，当 $0 < t \leqslant 1$ 时，

$$f_n(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = t^{-\frac{1}{2}}$$

对 $n\geqslant 2$，当 $1<t<\infty$时，

$$f_n(t)=\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n}\frac{1}{t^{\frac{1}{n}}}\leqslant\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n}\leqslant\frac{1}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$=4(t+2)^{-2}$$

于是，$n\geqslant 2$ 时，

$$f_n(t)\leqslant F(t)=\begin{cases}t^{-\frac{1}{2}} & 0<t\leqslant 1\\ 4(t+2)^{-2} & 1<t<\infty\end{cases}$$

但$F(t)$是 $(0,\ \infty)$上的可积函数．因此根据勒贝格控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)}\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n}\frac{1}{t^{\frac{1}{n}}}dt=\int_{(0,\infty)}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n}\frac{1}{t^{\frac{1}{n}}}\right]dt$$

$$=\int_{(0,\infty)}e^{-t}dt=1$$

3　证　设 $mE=+\infty$，$\{f_n(x)\}$ 是E上的非负可测函数列，且

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$$

$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$．往证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx$．

因为 $f_n(x)\leqslant f(x)$，所以若有n，使$\int_E f_n(x)dx=+\infty$，则 $\int_E f(x)dx=+\infty$，命题成立．故以下设所有 $f_n(x)$ 都是可积的．

令　$g_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)\quad n=1,\ 2,\ \cdots$

则 $\{g_n(x)\}$ 仍是E上的非负可测函数列，且

$$f(x)=f_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$$

根据 $mE=+\infty$场合下的勒贝格逐项积分定理（§6定理3）

$$\int_E f(x)\,dx=\int_E\left\{f_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)\right\}dx$$

$$=\int_E f_1(x)\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_E g_n(x)\,dx$$

$$=\int_E f_1(x)\,dx+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\int_E g_k(x)\,dx$$

$$=\int_E f_1(x)\,dx+\lim_{n\to\infty}\int_E\sum_{k=1}^{n-1}g_k(x)\,dx$$

$$=\int_E f_1(x)\,dx+\lim_{n\to\infty}\int_E[f_n(x)-f_1(x)]\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx$$

总之，勒维定理在 $mE=+\infty$时成立。

4　证　令 $f_n(x)=\{f(x)\}_n$，则

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$$

且
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

因为对每个 n，$f_n(x)$为有界的非负可测函数，所以据 $mE=+\infty$时的勒维定理(见上题)，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx$。

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\{f(x)\}_n\,dx=\int_E f(x)\,dx$$

5　证　为叙述简单起见，并不失一般性。我们设 $f(x)$在$[a,b]$上广义黎曼可积，仅在点b无界。

先证必要性．设广义黎曼可积函数 $f(x)$ 勒贝格可积，往证 $|f(x)|$ 广义黎曼可积．

显然当 $a\leqslant\eta<b$时，$f(x)$ 在 $[a, \eta]$上为有界黎曼可积，由黎曼积分理论可知，$|f(x)|$ 在 $[a, \eta]$上有界黎曼可积。于是由第五章§2的定理知 $|f(x)|$ 在$[a, \eta]$上勒贝格可积，且

$$(R)\int_a^\eta|f(x)|dx=(L)\int_a^\eta|f(x)|dx\leqslant(L)\int_a^b|f(x)|dx<+\infty$$

由η的任意性，即知 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$上广义黎曼可积．

再证充分性．设广义黎曼可积函数 $f(x)$的绝对值 $|f(x)|$ 亦广义黎曼可积，往证 $f(x)$ 勒贝格可积．

因为 $f(x)$广义黎曼可积，故在任一区间$[a,\eta]$ $(a\leqslant\eta<b)$ 上是有界黎曼可积的．而且，由 $|f(x)|$ 广义黎曼可积有

$$A=\lim_{\eta\to b}(R)\int_a^\eta|f(x)|dx<+\infty$$

选取 $\{\eta_n\}$，使$a\leqslant\eta_n<b$，且$\eta_1<\eta_2<\cdots$，$\eta_n\to b$ $(n\to\infty)$．作函数

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x) & a\leqslant x\leqslant\eta_n\\ 0 & \eta_n<x\leqslant b\end{cases}$$

则 $f_n(x)$在 $[a, \eta_n]$上与黎曼可积函数 $f(x)$相等，因此在 $[a, \eta_n]$上是勒贝格可积的，而且

$$(L)\int_a^{\eta_n}f_n(x)dx=(R)\int_a^{\eta_n}f(x)dx$$

又 $f_n(x)$在 $(\eta_n, b]$上显然是勒贝格可积的，而且$\int_{\eta_n}^b f_n(x)dx=0$。由勒贝格积分具有区间可加性，$f_n(x)$在 $[a,b]$ 上是勒贝格可积的，从而$|f_n(x)|$在 $[a,b]$ 上勒贝格可积．而且

$$(L)\int_a^b|f_n(x)|dx=(R)\int_a^{\eta_n}|f(x)|dx\leqslant A \qquad (*)$$

然而$\{|f_n(x)|\}$ 是$[a, b)$的单调增加函数列，所以结合（＊）式由勒维定理，$|f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x)|$在 $[a, b)$上勒贝格可积。

又因

$$|f_n(x)|\leqslant|f(x)| \quad n=1, 2, \cdots$$

即可积函数 $f(x)$为 $\{f_n(x)\}$ 的控制函数，故由勒贝格控制收敛定理，有

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n(x)\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}(R)\int_a^{\eta_n}f(x)\,dx=(R)\int_a^b f(x)\,dx$$

〔注〕对无穷限上的广义黎曼可积函数证明是类似的，只须将上面证明过程中选取的 $\{\eta_n\}$，使$\eta_n\to b$换作 $\eta_n\to+\infty$。

6　证　我们取 $E=(0, \infty)$，在E上定义函数

$$f_n(x)=\begin{cases}\sin x/x & 0<x\leqslant 2n\pi\\ 0 & 2n\pi<x<\infty\end{cases}$$

$$f(x)=\sin x/x$$

则显然 $\{f_n(x)\}$是 $E=(0,\infty)$上的可测函数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$及成立着

$$|f_n(x)|\leqslant 1 \quad n=1, 2,\cdots, \ x\in(0, \infty)$$

但是我们可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)}f_n(x)\,dx\neq\int_{(0,\infty)}f(x)\,dx$$

事实上，由 $f_n(x)$定义可知：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)}f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{(0,2n\pi]}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^{2n\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=(R)\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

另一方面$\left|\frac{\sin x}{x}\right|$在$(0,\ \infty)$上非黎曼可积．这是因为

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}$$

但$\frac{1}{2x}$在$(0,\infty)$上显然非黎曼可积（因为$\int_0^{\infty}\frac{1}{2x}\ dx$ 发散到 $+\infty$）；而$\frac{\cos 2x}{2x}$在$(0,\infty)$上黎曼可积。于是根据前题之结论，$f(x)=\frac{\sin x}{x}$在 $(0,\ \infty)$上不是勒贝格可积函数．当然有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)}f_n(x)dx\neq\int_{(0,\infty)}f(x)dx$$

即勒贝格有界收敛定理在 $mE=+\infty$时不成立。

§7 习 题 解 答

1 证 因$f(x,\ y)$ 在E上非负连续，故在E上非负可测．根据富比尼定理有

$$\int_E\frac{1}{x^{\alpha}(1-y)^{\beta}}dxdy=\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha}}dx\int_0^1\frac{1}{(1-y)^{\beta}}dy$$

由§6习题5 的结论可知

$$(L)\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha}}dx=(R)\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha}}\ dx=\frac{1}{1-\alpha}$$

$$(L)\int_0^1\frac{1}{(1-y)^{\beta}}dy=(R)\int_0^1\frac{1}{(1-y)^{\beta}}dy=\frac{1}{1-\beta}$$

于是

$$\int_E \frac{1}{x^\alpha(1-y)^\beta}\,dxdy=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\beta}<+\infty$$

这既说明了 $f(x, y)$ 在 E 上可积，又求得了积分值。

2 证 因 $f(x)$，$g(y)$ 分别在 R^p，R^q 上可积，故它们分别在 R^p，R^q 上可测。于是它们的绝对值 $|f(x)|$，$|g(y)|$ 分别在 R^p，R^q 上可测。由第四章§4习题 9 知，$|f(x)|\cdot|g(y)|$ 在 $R^p\times R^q$ 上非负可测，由富比尼定理

$$\int_{R^{p+q}}|f(x)|\cdot|g(y)|\,dxdy=\int_{R^p}dx\int_{R^q}|f(x)|\cdot|g(y)|\,dy$$

对任一固定的 x，有

$$\int_{R^q}|f(x)||g(y)|\,dy=|f(x)|\int_{R^q}|g(y)|\,dy$$

由题设知 $g(y)$ 在 R^q 上可积，故 $\int_{R^q}|g(y)|\,dy$ 为一确定的数，因此

$$\int_{R^{p+q}}|f(x)|\cdot|g(y)|\,dxdy=\int_{R^q}|g(y)|\,dy\cdot\int_{R^p}|f(x)|\,dx \quad (*)$$

又由于 $f(x)$ 的可积性，知 $\int_{R^p}|f(x)|\,dx<+\infty$，于是，$(*)$式右端为有限数，从而 $|f(x)|\cdot|g(y)|$ 在 R^{p+q} 上可积。即 $|f(x)\cdot g(y)|$ 在 R^{p+q} 上可积。由此推得 $f(x)\cdot g(y)$ 在 R^{p+q} 上可积。再由富比尼定理得到

$$\int_{R^{p+q}}f(x)\cdot g(y)\,dxdy=\left(\int_{R^p}f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_{R^q}g(y)\,dy\right)$$

3 证 容易看出 $F(x, y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ 满足 $\frac{\partial}{\partial x}F(x, y)=f(x, y)$。故

$$\int_{(0,1)}f(x, y)\,dx=F(x, y)\Big|_0^1=\frac{1}{1+y^2}$$

于是

$$\int_{(0,1)} dy \int_{(0,1)} f(x,y)\,dx = \int_{(0,1)} \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$= \operatorname{arctg} y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

类似地，易知$G(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$满足$\frac{\partial}{\partial y} G(x, y) = f(x, y)$，故

$$\int_{(0,1)} f(x, y)\,dy = G(x, y)\Big|_0^1 = -\frac{1}{1+x^2}$$

于是

$$\int_{(0,1)} dx \int_{(0,1)} f(x, y)\,dy = \int_{(0,1)} \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= (\operatorname{arctg} x)\Big|^1 = -\frac{\pi}{4}$$

所以

$$\int_{(0,1)} dx \int_{(0,1)} f(x, y)\,dy \neq \int_{(0,1)} dy \int_{(0,1)} f(x, y)\,dx$$

这个事实并非与富比尼定理矛盾．因为富比尼定理的条件要求$f(x, y)$应在$(0, 1)\times(0, 1)$上可积．但这里$f(x, y)$不具备该条件．

事实上，我们能够证明$f(x, y)$在$(0, 1)\times(0, 1)$上不可积．因为对$0<y<1$，有

$$\int_0^y f(x, y)\,dx = \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_0^y = \frac{1}{2y}$$

但是

$$\int_{(0,1)} |f(x, y)|\,dx \geqslant \int_0^y f(x, y)\,dx = \frac{1}{2y}$$

从而

$$\int_{(0,1)}dy\int_{(0,1)}|f(x,\ y)|\ dx\geqslant\int_{(0,1)}\frac{1}{2y}dy=+\infty$$

故 $|f(x,\ y)|$ 在E上不可积，由此推出 $f(x,\ y)$ 在E上不可积。

通过此题，使我们进一步看到富比尼定理中 $f(x,\ y)$的可积条件是不可缺少的。

§8 习题解答

1 证 因为对任意实数α和β，成立着

$$|\alpha-\beta|\geqslant\Big||\alpha|-|\beta|\Big|$$

于是对任意分划 D：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\Big||f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\Big|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant V_a^b(f)$$

因此，$|f(x)|$ 是有界变差函数，且

$$V_a^b(|f|)\leqslant V_a^b(f)$$

2 解 由 $f(x)$ 的定义及有界变差的定义容易算出，

$$V_0^2(f)=7.$$

因 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上是单调增加的，故由本节例1的结果可得

$$V_0^1(f)=f(1)-f(0)=5$$

从有界变差的定义显然有

$$V_1^2(f)=2$$

故有等式

$$V_0^2(f)=V_0^1(f)+V_1^2(f)$$

3 证 对 $[a,\ b]$ 的任意分划 D，

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

$$V_a^b[f, D] = \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lim_{n\to\infty} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})| \leqslant M$$

由分划D的任意性，可得$V_a^b(f) \leqslant M$. 即 $f(x) \in V[a, b]$.

4　证　因 $f(x)$在 $[a, b]$上绝对连续，故$f'(x)$在$[a, b]$上可积，且对 $[a, b]$ 上任意两点 $x_1 < x_2$，牛顿——莱布尼兹公式：

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\, dx \qquad (*)$$

成立．由题设 $f'(x) \geqslant 0$, $p.p$ 于 $[a, b]$，故由积分的单调性可知

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\, dx \geqslant \int_{x_1}^{x_2} 0 \cdot dx = 0$$

于是由(*)式得

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$$

即　　$f(x_2) \geqslant f(x_1)$

这就证明了 $f(x)$在 $[a, b]$上为单调不减函数．

5　证　因 $f(x)$为单调函数，故 $f'(x)$ 为可积函数，设

$$g_n(x) = \begin{cases} f'(x) & 当\ f'(x) \leqslant n \\ n & 当\ f'(x) < n \end{cases}$$

则　$g_n(x) \leqslant f'(x)$且$g_n(x) \to f'(x)$．令$G_n(x) = f(x) - \int_a^x g_n(x)\, dx$显然$G_n'(x) \geqslant 0$，由此可证得$G_n(x)$是增加函数．

于是$G_n(x)\geqslant G_n(a)$，即$f(x)-f(a)\geqslant\int_a^x g_n(x)dx$。由控制收敛定理得 $f(x)-f(a)\geqslant\lim_{n\to\infty}\int_a^x g_n(x)dx=\int_a^x f'(x)dx$。同理可证

$f(x)-f(a)\leqslant\int_a^x f'(x)dx$。从而

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(x)dx$$

6 证 当 $x\neq 0$ 时，

$$F'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} \qquad (1)$$

当$x=0$时，应用在一点的导数定义

$$F'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(0+\Delta x)-F(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}\right)}{\Delta x}$$
$$=0$$

所以$F(x)$在$[-1,1]$上处处可微。

但$F(x)$在$[-1,1]$上不绝对连续。这可通过证明$F'(x)$不可积来说明。因为（1）式成立，故只须证$\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$在$[-1,1]$上不可积。事实上，当$\left[\left(2n+\frac{1}{3}\right)\pi\right]^{-\frac{1}{2}}\leqslant x\leqslant\left[\left(2n-\frac{1}{3}\right)\pi\right]^{-\frac{1}{2}}$时，$\left|\cos\frac{1}{x^2}\right|\geqslant\frac{1}{2}$，这时

$$\left|\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right|\geqslant\frac{1}{x} \qquad (2)$$

令I_n表示区间$\left[\left\{\left(2n+\frac{1}{3}\right)\pi\right\}^{-\frac{1}{2}},\left\{\left(2n-\frac{1}{3}\right)\pi\right\}^{-\frac{1}{2}}\right]$，则易知$\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\subseteq[0,1]\subseteq[-1,1]$，且

$$\int_{I_n}\frac{1}{x}dx=\ln\left(\frac{2n-\frac{1}{3}}{2n+\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

于是

$$\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n}\frac{1}{x}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{2n-\frac{1}{3}}{2n+\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{2n+\frac{1}{3}}{2n-\frac{1}{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\frac{2}{3}}{2n-\frac{1}{3}}\right)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\frac{2}{3}}{2n-\frac{1}{3}}}{1+\frac{\frac{2}{3}}{2n-\frac{1}{3}}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n+1}\qquad(3)$$

注意，上式中的不等号发生是因为当 $x>0$ 时，有$\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$. 易知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n+1}$ 是发散到$+\infty$的. 故由（3）、（2）可知$\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$在$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n$上不可积. 于是 $\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$在［$-1$，1］上不可积. 再由（1）式即得$F'(x)$在［$-1$，1］上不可积. 从而$F(x)$不是绝对连续函数.

第六章　平方可积函数习题解答

§1　习题解答

1　解　例如

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n+1}\\ 1 & \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1\\ \sqrt{n} & \frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)\end{cases}$$

则

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,(n+1)}$$

由于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,(n+1)}$ 收敛，故 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上可积.

但是

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=+\infty$$

可见 $f(x)\overline{\in}L_2$.

2　证　（1）$\|f(x)\|^2=\int_a^b f^2(x)\,dx\geqslant 0$，从而 $\|f(x)\|\geqslant$

0．由第五章勒贝格积分的性质，等式

$$\|f(x)\|^2=\int_a^b f^2(x)dx=0$$

成立的充要条件是 $f^2(x)=0$，此即 $f(x)=0$。从而证得（1）。

（2）$\|af(x)\|=\left(\int_a^b a^2f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=|a|\cdot\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=|a|\cdot\|f(x)\|$$

（3）由引理2（哥西不等式），有

$$\|f+g\|=\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|f\|+\|g\|$$

从而证得（3）．

3　证　$(af+\beta g,h)=\int_a^b(af+\beta g)hdx$

$$=\int_a^b(afh+\beta gh)dx$$

$$=a\int_a^b fhdx+\beta\int_a^b ghdx$$

$$=a(f,\ h)+\beta(g,\ h)$$

4　**证**　由三角不等式，有

$$\rho(x,\ z)\leqslant\rho(x,\ y)+\rho(y,\ z)\tag{1}$$

$$\rho(y,\ z)\leqslant\rho(y,\ x)+\rho(x,\ z)$$

$$=\rho(x,\ y)+\rho(x,\ z)\tag{2}$$

由（1）与（2）得

$$\rho(x,\ z)-\rho(y,\ z)\leqslant\rho(x,\ y)$$

$$\rho(y,\ z)-\rho(x,\ z)\leqslant\rho(x,\ y)$$

于是

$$|\rho(x, z)-\rho(y, z)|\leqslant\rho(x, y)$$

5　证　充分性　设 f 与g线性相关，则可设 $f=\alpha g$，于是

$$|(f, g)|=\left|\int_a^b \alpha g\cdot g\,dx\right|=|\alpha|\int_a^b g^2dx=|\alpha|\cdot\|g\|^2$$

$$=\|\alpha g\|\cdot\|g\|=\|f\|\cdot\|g\|$$

必要性　设 $|(f, g)|=\|f\|\cdot\|g\|$。若$g=0$，显然f与g线性相关，从而结论成立。现设 $g\neq 0$，则对任意 α，有

$$0\leqslant\|f-\alpha g\|^2=(f-\alpha g, f-\alpha g)$$

$$=(f, f)-2\alpha(f, g)+\alpha^2(g, g)$$

取 $\alpha=\dfrac{(f, g)}{(g, g)}$。则上式变成

$$0\leqslant\|f-\alpha g\|^2=(f,f)-\frac{|(f,g)|^2}{(g, g)}$$

$$=\|f\|^2-\frac{|(f,g)|^2}{(g, g)} \qquad (*)$$

由题设

$$|(f, g)|=\|f\|\cdot\|g\|$$

两端平方，得

$$|(f, g)|^2=\|f\|^2\cdot\|g\|^2$$

$$\frac{|(f,g)|^2}{\|g\|^2}=\|f\|^2$$

$$\|f\|^2-\frac{|(f,g)|^2}{\|g\|^2}=0$$

可见(*)式右端为0，于是

$$\|f-\alpha g\|=0$$

此即 $f=\alpha g$，亦即 f 与g线性相关。

6　证　$\frac{1}{4}(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2)$

$$=\frac{1}{4}((f+g,\ f+g)-(f-g,\ f-g))$$

$$=\frac{1}{4}((f,\ g)+(g,\ f)+(g,\ f)+(f,\ g))$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 4(f,\ g)$$

$$=(f,\ g)$$

7　证　$\|f_n-f\|^2=(f_n-f,\ f_n-f)$

$$=\|f_n\|^2-(f,\ f_n)-(f_n,\ f)+\|f\|^2$$

$$=\|f_n\|^2-2(f_n,\ f)+\|f\|^2$$

由题设 $(f_n,\ f)\to(f,\ f)$ 及 $\|f_n\|\to\|f\|$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|^2=\lim_{n\to\infty}(\|f_n\|^2-2(f_n,\ f)+\|f\|^2)$$

$$=2\|f\|^2-2(f,\ f)=0$$

从而　$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$

8　证　依距离空间的定义，直接验证即得。

9　证　现验证如下定义的距离

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1 & \text{当 } x\neq y\\ 0 & \text{当 } x=y\end{cases}$$

满足距离的三条要求，头两条是显然的，只须验证三角不等式

$$\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y)$$

事实上，若$x=y$，则 $\rho(x,\ y)=0$，三角不等式显然成立。若 $x\neq y$，则 $\rho(x,\ y)=1$。这时对任意的z，都有

$$\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y)\geqslant 1$$

从而

$$\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y)$$

综上证得E是一距离空间.

10 证 令 $g(x)=1$, 由许瓦兹不等式

$$\int_a^b|f(x)|dx\leqslant\|1\|\cdot\||f(x)|\|=\sqrt{b-a}\cdot\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

§2 习题解答

1 证（1）设F为距离空间X中任一闭集。令

$$G_n=\left\{x\in X\,|\rho(x,F)<\frac{1}{n}\right\}$$

容易验证每个G_n是开集，且

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$$

即（1）成立。

（2）设G是距离空间X中任一开集，令

$$F=\mathscr{C}G$$

则F是闭集，由（1）知，存在开集$\{G_n\}$，使

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$$

从而

$$G=\mathscr{C}F=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}G_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$$

其中 $F_n=\mathscr{C}G_n$ 是闭集。

2 证 因为$f(x)\in L_2$，所以 $f^2(x)$ 是勒贝格可积的.由积分的绝对连续性，对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对〔a, b〕的任意子集e,只要 $me<\delta$，便有

$$\int_{e} f^2(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{8}$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ $p.p.$ 于 $[a, b]$，并且 $|f_n(x)| \leqslant f(x)$，所以$g(x)$可测且

$$|g(x)| \leqslant |f(x)| \quad p.p. \text{于} [a, b]$$

于是

$$g^2(x) \leqslant f^2(x) \quad p.p. \text{于} [a, b]$$

因而$g(x) \in L_2$。

由叶果洛夫定理，对于上述 δ，存在闭集 $F \subseteq [a, b]$，使 $m([a, b] - F) < \delta$，而函数列 $\{f_n(x)\}$ 在F上一致收敛于$g(x)$。令

$$E = [a, b] - F$$

则 $mE < \delta$，于是有

$$\int_a^b (f_n - g)^2 dx = \int_F (f_n - g)^2 dx + \int_E (f_n - g)^2 dx \quad (*)$$

而

$$\int_E (f_n - g)^2 dx = \int_E (f_n^2 - 2f_n g + g^2)\,dx$$

$$\leqslant 4\int_E f^2 dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

又因 $\{f_n\}$ 在F上一致收敛于g，所以对上述 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n \geqslant N$时，有

$$|f_n - g| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad x \in F$$

于是，当 $n \geqslant N$时，由式$(*)$可得

$$\int_a^b (f_n - g)^2 dx = \int_F (f_n - g)^2 dx + \int_E (f_n - g)^2 dx$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot mF + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = g$

3 证 $\left|\int_a^b f_n g_n dx - \int_a^b fg dx\right|$

$$= \left|\int_a^b (f_n g_n - f_n g + f_n g - fg) dx\right|$$

$$\leqslant \left|\int_a^b f_n(g_n - g) dx\right| + \left|\int_a^b (f_n - f) g dx\right|$$

$$\leqslant \|f_n\| \cdot \|g_n - g\| + \|f_n - f\| \cdot \|g\| \qquad (*)$$

上面最后一个不等式是由许瓦兹不等式推得的。

因 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$，则由范数的连续性，知

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|$$

故 $\{\|f_n\|\}$ 有界，设

$$\|f_n\| \leqslant k \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

令 $M = \max\{k, \|g\|^2\}$

由于

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad \lim_{n\to\infty} g_n = g$$

则对任意 $\varepsilon > 0$，有N，使当$n \geqslant N$时，有

$$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \|g_n - g\| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

于是，当$n \geqslant N$时，由式($*$)可得

$$\left|\int_a^b f_n g_n dx - \int_a^b fg dx\right| < M \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n g_n dx = \int_a^b fg dx$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n, g_n) = (f, g)$

4 证 假设 $\{f_n(x)\}$ 平均收敛于 $f(x)$，往证必有子列

$\{f_{n_k}(x)\}$几乎处处收敛于 $f(x)$。事实上，由

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b(f-f_n)^2dx=0$$

可知有如下的 $\{n_k\}$，

$$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$$

使得

$$\int_a^b(f_{n_k}-f)^2dx<\frac{1}{2^k}$$

因此，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b(f_{n_k}-f)^2dx$$

是收敛的。令

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_k}(x)-f(x))^2$$

由第五章勒贝格基本定理，有

$$\int_a^b F(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b(f_{n_k}-f)^2dx<+\infty$$

可见 $F(x)$ 是可积函数，因此，它是几乎处处有限的。于是，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_k}(x)-f(x))^2$$

几乎处处收敛，而在收敛点（几乎处处）有

$$\lim_{k\to\infty}(f_{n_k}(x)-f(x))^2=0$$

亦即

$$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=f(x)$$

几乎处处成立。

5 证 任取 $g\in L_2$。于是

$$\left|\int_a^b f_n g dx-\int_a^b f g dx\right|=\left|\int_a^b (f_n-f) g dx\right|$$
$$\leqslant \|f_n-f\|\cdot\|g\|$$
$$=\|g\|\cdot\left\{\int_a^b (f_n-f)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (*)$$

由勒贝格有界收敛定理（参见定理证明），有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_n-f)^2 dx=0$$

从而，由式(*)有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n g dx=\int_a^b f g dx$$

此即 $\{f_n(x)\}$弱收敛于 $f(x)$。

6 证

$$\int_a^b (f_n-f)^2 dx=\int_a^b f^2{}_n dx-2\int_a^b f_n\cdot f dx+\int_a^b f^2 dx \quad (*)$$

由题设 $\|f_n\|\to\|f\|$，有

$$\int_a^b f^2{}_n dx=\|f_n\|^2\to\|f\|^2=\int_a^b f^2 dx$$

又由于 $\{f_n\}$弱收敛于 $f(x)$。则有

$$\int_a^b f_n\cdot f dx\to\int_a^b f^2 dx$$

从而由式(*)可得

$$\int_a^b (f_n-f)^2 dx\to\int_a^b f^2 dx-2\int_a^b f^2 dx+\int_a^b f^2 dx=0$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_n-f)^2 dx=0$$

此即证得 $\{f_n(x)\}$平均收敛于 $f(x)$。

注：本题中 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛的条件一般来说是不可去掉的。也就是说，只假定 $\|f_n\|\to\|f\|$，推不出 $\|f_n-f\|\to 0$。

事实上，取

$$f_n(x)=1+\frac{1}{n},\quad x\in[0,\ 1]$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ -1 & x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

则 f_n, f 均属于 $L_2[0,\ 1]$. 且有

$$\|f_n\|^2=\int_0^1\left(1+\frac{1}{n}\right)^2dx\to 1=\int_0^1 f^2(x)dx=\|f\|^2$$

即 $\qquad \|f_n\|\to\|f\|$

但是

$$\int_0^1(f_n-f)^2dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{n}-1\right)^2dx$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(1+\frac{1}{n}+1\right)^2dx\to 2$$

即 $\|f_n-f\|$ 不趋于 0 .

7 证 由黎曼——勒贝格引理（见补充例题 7），对任一 $f\in L_2[-\pi,\ \pi]$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0,\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$$

此即

$$(f,\ \cos nx)\to 0,\ (f,\ \sin nx)\to 0\ (n\to\infty)$$

这说明$\{\cos nx\}$与$\{\sin nx\}$均弱收敛于 0 ，但没有

$$\cos nx\Longrightarrow 0,\ \sin nx\Longrightarrow 0$$

若不然，不妨设 $\cos nx\Longrightarrow 0$, 则有 $\cos^2 nx\Longrightarrow 0$, 又 $|\cos^2 nx|\leqslant 1$, 应用勒贝格有界收敛定理，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx\to 0\quad(n\to\infty)$$

但这与

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

矛盾．这说明 $\cos nx \Longrightarrow 0$ 不成立。

8　证　对任意$g\in L_2$，往证

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \cdot g dx = \int_a^b f \cdot g dx$$

分以下几步进行。

1°　$\|f\| \leqslant k$．

由 $f_n \Longrightarrow f$　可知 $f_n^2 \Longrightarrow f^2$．由黎斯定理知，有子列$\{f^2_{n_k}(x)\}$，使

$$f^2_{n_k}(x) \to f^2(x) \quad p.p.$$

应用法都引理，有

$$\int_a^b f^2 dx = \int_a^b \lim_{k\to\infty} f^2_{n_k} dx = \int_a^b \underline{\lim}_{k\to\infty} f^2_{n_k} dx$$

$$\leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_a^b f^2_{n_k} dx \leqslant k^2$$

所以有$\|f\| \leqslant k$．

2°　对任意 $g\in L_2$，$\{f_n g\}$ 具有等度绝对连续的积分．

事实上，对任意可测集 $e\subseteq [a,\ b]$，

$$\left|\int_e f_n g dx\right| \leqslant \left(\int_e f^2_n dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_e g^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant k \cdot \left(\int_e g^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

由于 g^2 的积分具有绝对连续性，k 是与 n 无关的常数，于是$\{f_n g\}$具有等度绝对连续的积分．

3°　由于 $\{f_n g\}$是可积函数列，$f_n g \Longrightarrow fg$，$\{f_n g\}$具有等度绝对连续的积分，于是由第五章维他利定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\cdot g dx=\int_a^b f\cdot g dx$$

此即证得 $\{f_n(x)\}$弱收敛于 $f(x)$。

9 证 1° 先证 L_2^k 是 L_2 的一个闭子集，亦即：如果 $g(x)$ 是L_2^k的一个聚点，往证 $g(x)\in L_2^k$。

由聚点的定义得知，在 L_2^k 中有一列函数 $\{f_n(x)\}$ ，使 $\|f_n-g\|\to 0$。由 §2 推论 2 知有子列 $\{f_{n_k}(x)\}$，使

$$f_{n_k}(x)\to g(x)\ \ p.p. 于[a,\ b]$$

由于

$$|f_{n_k}(x)|\leqslant k\ \ p.p. 于[a,\ b]$$

取极限便得

$$|g(x)|\leqslant k\ \ p.p. 于[a,\ b]$$

此即 $g\in L_2^k$。

2° 证后一结论。必要性由§2定理 4 即得，现证充分性。设 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$。同1°中理由一样，有 $f(x)\in L_2^k$。对任意 $\sigma>0$，令

$$E_n(\sigma)=\{x\,|\,|f_n-f|\geqslant\sigma\},\ \ B_n(\sigma)=[a,\ b]-E_n(\sigma)$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b|f_n-f|^2dx&=\int_{E_n(\sigma)}|f_n-f|^2dx+\int_{B_n(\sigma)}|f_n-f|^2dx\\&\leqslant\int_{E_n(\sigma)}|f_n-f|^2dx+\int_a^b\sigma^2dx\\&=\int_{E_n(\sigma)}|f_n-f|^2dx+\sigma^2(b-a)\qquad(*)\end{aligned}$$

因$\lim\limits_{n\to\infty} mE_n(\sigma)=0$及 $|f_n-f|^2$ 可积，则由积分的绝对连续性，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当$me<\delta$时，恒有

$$\int_e|f_n-f|^2\,dx<\frac{\varepsilon}{2}$$

对上述δ，存在N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $mE_n(\sigma)<\delta$。于是，当$n\geqslant N$时，

$$\int_{E_n(\sigma)}|f_n-f|^2\ dx<\frac{\varepsilon}{2}$$

我们自然可以选取σ，使 $\sigma^2(b-a)<\frac{\varepsilon}{2}$，从而，当 $n\geqslant N$ 时，由式（*）便有

$$\int_a^b|f_n-f|^2\ dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$$

此即证得 $\{f_n(x)\}$平均收敛于 $f(x)$。

§3 习 题 解 答

1 证 设$\{x_n\}$是距离空间X中一基本列，于是有 n_0，当$n\geqslant n_0$时，

$$\rho(x_n,\ x_{n_0})<1$$

令 $K=\max\limits_{i<n_0}\{\rho(x_i,\ x_{n_0})\}$，则对任意的$x_n$，皆有

$$\rho(x_n,\ x_{n_0})<K+1$$

此即表示 $\{x_n\}$ 皆在以x_{n_0}为心，以 $K+1$ 为半径的邻域中，故$\{x_n\}$有界。

2 证 由闭集和空间完备性的定义即知。

3 证 令

$$S_n=f_1+f_2+\cdots+f_n$$

于是

$$\|S_n-S_m\|=\left\|\sum_{j=m+1}^{n}f_j\right\|\leqslant\sum_{j=m+1}^{n}\|f_j\|$$

$$\leqslant \sum_{j=m+1}^{\infty} \|f_j\| \to 0 \quad (m\to\infty)$$

从而，$\{S_n\}$是基本列。又由于L_2是完备的，因此$\{S_n\}$必收敛，亦即$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$收敛。

4 证 为证$f(x)$是连续函数，也即证明：若$\rho(x_n, x_0)\to 0$，则$|f(x_n)-f(x_0)|\to 0$ $(n\to\infty)$。

设$\{x_n\}\subseteq X$，$x_0\in X$，且$\rho(x_n, x_0)\to 0$ $(n\to\infty)$。任取$y\in A$，由三角不等式，有

$$\rho(x_n, y)\leqslant \rho(x_n, x_0)+\rho(x_0, y)$$

于是

$$\inf_{y\in A}\{\rho(x_n, y)\}\leqslant \rho(x_n, x_0)+\inf_{y\in A}\{\rho(x_0, y)\}$$

此即

$$f(x_n)\leqslant \rho(x_n, x_0)+f(x_0)$$

$$f(x_n)-f(x_0)\leqslant \rho(x_n, x_0) \tag{1}$$

同理可得

$$f(x_0)-f(x_n)\leqslant \rho(x_n, x_0) \tag{2}$$

由（1）与（2）即得

$$|f(x_n)-f(x_0)|\leqslant \rho(x_n, x_0)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

故$f(x)$是连续函数。

§4 习题解答

1 证 因为

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 nx}{\pi}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2\pi}dx=1 \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 nx}{\pi}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2\pi}dx=1\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2dx=1$$

以及

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+m)x+\sin(n-m)x}{2\pi}dx$$

$$=0\quad(n\neq m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(n-m)x-\cos(n+m)x}{2\pi}dx$$

$$=0\quad(n\neq m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(n+m)x+\cos(n-m)x}{2\pi}dx$$

$$=0\quad(n\neq m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}dx=0\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}dx=0\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

可知三角系统T是标准正交的。

2　证　设

$$\varphi_{k_1},\ \varphi_{k_2},\ \cdots,\ \varphi_{k_n}$$

是从$\{\varphi_k\}$中任取的有限个元素，往证

$$\alpha_1\varphi_{k_1}+\alpha_2\varphi_{k_2}+\cdots+\alpha_n\varphi_{k_n}=0$$

的充要条件是

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$$

充分性是显然的，现证必要性．设

$$\alpha_1\varphi_{k_1}+\alpha_2\varphi_{k_2}+\cdots+\alpha_n\varphi_{k_n}=0$$

则

$$0=(\alpha_1\varphi_{k_1}+\alpha_2\varphi_{k_2}+\cdots+\alpha_n\varphi_{k_n},\varphi_{k_m})$$

$$=\alpha_m(\varphi_{k_m},\ \varphi_{k_m})\quad(m=1,2,\cdots,n)$$

由于$\{\varphi_k\}$是标准的，所以

$$(\varphi_{k_m},\ \varphi_{k_m})=1\quad(m=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

从而 $\alpha_m=0\quad(m=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

3　证　设$g(x)$是E上的特征函数，即

$$g(x)=\begin{cases}0 & 当\ x\in[a,\ b]-E\\ 1 & 当\ x\in E\end{cases}$$

则 $g(x)\in L_2$。于是，由§4定理2，有

$$\int_E f(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}a_k b_k$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)\varphi_k(x)dx\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\int_E\varphi_k(x)dx$$

可见 $f(x)$关于$\{\varphi_k\}$的付立叶级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$ 在E上可逐项积分。

4　证　必要性　设 $(f,\ g)=0$，则

$$\|f+\alpha g\|^2=(f+\alpha g,\ f+\alpha g)$$

$$=\|f\|^2+2\alpha(f,g)+\alpha^2\|g\|^2$$

$$=\|f\|^2+\alpha^2\|g\|^2$$

同理可得

$$\|f-\alpha g\|^2=\|f\|^2+\alpha^2\|g\|^2$$

于是

$$\|f+\alpha g\| = \|f-\alpha g\|$$

充分性 设 $\|f+\alpha g\| = \|f-\alpha g\|$，则由必要性证明中的推导过程可知

$$2\alpha(f, g) = 0$$

取 $\alpha=1$，便有 $(f, g)=0$。

5 证 1° 先证(i)与(ii)等价。

令

$$S_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

$$\sigma_n = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2$$

由$\{e_k\}$的正交性，则对任意的m及$n>m$，

$$\begin{aligned}\|S_n - S_m\|^2 &= \|\alpha_{m+1} e_{m+1} + \cdots + \alpha_n e_n\|^2 \\ &= |\alpha_{m+1}|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m\end{aligned}$$

因此，$\{S_n\}$是基本列的充要条件是$\{\sigma_n\}$为基本列，又因L_2及实直线 R^1 都是完备的，从而证得 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ 收敛的充要条件是 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ 收敛。

2° 再证(ii)与(iii)等价。

(ii)→(iii)。设 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ 收敛。由1°知$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ 亦收敛。设 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = x$。令

$$S_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

于是

$$(S_n, e_j) = \alpha_j, \quad j=1,2,\cdots,k \ (k \leqslant n \text{ 且固定})$$

由假设条件，知

$$S_n \to x \quad (n\to\infty)$$

由内积的连续性

$$a_j = (S_n, e_j) \to (x, e_j) \quad (j \leqslant k)$$

因为$n\to\infty$时，$k(\leqslant n)$也可以任意大，所以

$$a_j = (x, e_j) \quad j = 1, 2, \cdots$$

此即证得 (iii)。

(iii)→(ii)．设 $a_k = (x, e_k)$．由贝塞尔不等式，可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$$

收敛．再由(ii)推(iii)的证明知

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$$

收敛。又由于1°已证得(ii)与(i)等价，故

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$$

收敛．

6　证　先证 $M^{\perp}$ 是线性子空间．设 $x, y \in M^{\perp}$．则对任意实数α及任意 $z \in M$,

$$(x+\alpha y, z) = (x, z) + \alpha(y, z) = 0$$

于是 $x+\alpha y \in M^{\perp}$．因此$M^{\perp}$是一线性子空间．

再证 $M^{\perp}$是闭的．设$x_0 \in (M^{\perp})'$，则有 $\{x_n\} \subseteq M^{\perp}$，使

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

任取 $y \in M$．由内积的连续性，

$$(x_0, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y) = 0$$

于是　$x_0 \in M^{\perp}$

因此$M^{\perp}$是闭的，即证得$M^{\perp}$是L_2的一个完备的子空间。

§5 习题解答

证 任取一多项式

$$P(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_mx^m$$

以 $S_n(x^k)$ 表示$x^k(k=0,1,\cdots,m)$ 关于标准正交系$\{\varphi_k(x)\}$展成付立叶级数的前n项和，则由 §5 定理 1 的证明知

$$S_n(P)=A_0S_n(1)+A_1S_n(x)+\cdots+A_mS_n(x^m)$$

因此

$$\|P-S_n(P)\|\leqslant\sum_{k=0}^{m}|A_k|\cdot\|x^k-S_n(x^k)\| \qquad (*)$$

由题设，x^k $(k=1,2,\cdots)$ 关于$\{\varphi_k(x)\}$的封闭公式成立，所以

$$\|x^k-S_n(x^k)\|\to0 \quad (n\to\infty,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

于是，由式$(*)$便知

$$\|P-S_n(P)\|\leqslant\sum_{k=0}^{m}|A_k|\cdot\|x^k-S_n(x^k)\|\to0 \ (n\to\infty)$$

从而，封闭公式对一切多项式成立。而所有多项式组成的集合在L_2中处处稠密，故由斯切克洛夫定理知，$\{\varphi_k(x)\}$是封闭的。再由§4定理 5 知，$\{\varphi_k(x)\}$ 是完全的。

主要参考文献

〔1〕江泽坚　吴智泉合编，实变函数论，人民教育出版社，1978.

〔2〕郑维行　王声望编，实变函数与泛函分析概要（第一、二册），人民教育出版社，1980.

〔3〕И. П.那汤松著，实变函数论（上册修订本），徐瑞云译，人民教育出版社，1961.

〔4〕夏道行　吴卓人　严绍宗　舒五昌编著，实变函数论与泛函分析，人民教育出版社，上册1978，下册1979.

〔5〕Л. А. 刘斯铁尔尼克　В. И.索伯列夫著，泛函分析概要，杨从仁译，科学出版社，1964.

期

后　记

本书由徐荣权、金长泽主编．王坤健、孙家宸、周学海、许凤分别参加编写了第二章、第三章、第五章、第六章及相应各章的学习指导．

本书在编写过程中，得到东北师范大学数学系和函数论教研室的支持．梁世安绘制了全部插图，承蒙辽宁大学数学系范柏林、刘吉善审阅了原稿，在此谨表谢意．

限于编者水平，本书难免有不当甚至错误之处，切望读者批评指正．

编　者

1983年4月

[General Information]
□□=□□□□□
□□=
□□=476
SS□=0
□□□□=
Vss□=62052916